Квант

1975
10

Научно-популярный
физико-математический
журнал

Вице-президент Академии наук академик В. А. Стеклов, начальник Военно-медицинской академии В. Н. Тонков, непременный секретарь Академии наук академик С. Ф. Ольденбург и писатель А. М. Горький (слева направо) на приеме у В. И. Ленина 27 января 1921 года. Репродукция с картины В. А. Серова.

Основан в 1970 году

Квант

1975
10

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Штаб советской науки

В октябре 1975 года в Москве проводится торжественная юбилейная сессия Академии наук СССР, посвященная 250-летию с момента ее основания. Сессия проходит как всенародный праздник советской науки и смотр ее выдающихся достижений.

Академия наук нашей страны была создана по указу Петра I, изданному 28 января 1724 года (по старому стилю). Однако торжественное открытие Академии состоялось уже после смерти Петра I в августе 1725 года.

Празднование юбилея Академии наук СССР началось еще в 1974 году. За это время в ее институтах и научных учреждениях были проведены научные сессии и общие собрания. Торжественные собрания прошли также в республиканских Академиях наук. Были организованы многочисленные выставки и смотры результатов научных работ, проходившие под девизом «Достижения науки — народному хозяйству». Состоялись встречи крупнейших ученых с коллективами рабочих и колхозников. Нынешняя юбилейная сессия завершает эти торжества.

История Академии наук неотделима от истории отечественной науки. 250 лет — большой срок. И за это время роль и место Академии в нашей науке подвергались значительным изменениям. Эти перемены неизбежно отражались на состоянии всех областей русской науки.

В период, предшествовавший Великой Октябрьской социалистической революции, состояние математики и физики в России было существенно различным. Труды Н. И. Лобачевского, М. В. Остроградского, П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова, А. А. Маркова, В. А. Стеклова создали всемирный авторитет русской математике. Физика же в России была развита значительно слабее. Правда, и ее в этот период украшали имена А. Г. Столетова, П. Н. Лебедева, Н. А. Умова, но общий уровень развития русской физики был существенно ниже, чем за рубежом, и она не оказывала заметного влияния на развитие мировой физики. Недаром выдающийся физик А. Ф. Иоффе в своих воспоминаниях о дореволюционной отечественной физике писал, что большинство талантливых русских физиков вынуждено было выполнять свои исследования в иностранных институтах и лабораториях.

Октябрьская революция коренным образом изменила положение науки в нашей стране. Наука превратилась в одно из важнейших средств построения нового социалистического общества. Огромное внимание успешному развитию молодой советской науки уделял В. И. Ленин. В невероятно тяжелых условиях гражданской войны и хозяйственной разрухи Ленин стремился сделать все возможное для помощи ученым, которые вместе со всем народом терпели жестокую нужду и лишения. Он потратил много сил на то, чтобы объединить усилия ученых и направить их на решение важнейших проблем народного хозяйства. Ленин глубоко верил в то, что «перед союзом представителей науки, пролетариата и техники не устоит никакая темная сила» *). И русские

*) В. И. Ленин. Полное собрание сочинений. Т. 40, с. 189.

ученые сознательно шли на огромные жертвы, мужественно переносили трудности, стоявшие на пути развития нашей науки. Вспоминая об этом, А. М. Горький писал: «Я наблюдал, с каким скромным героизмом, с каким мужеством творцы русской науки переживали мучительный голод и холод, видел, как они работали и как умирали. Мои впечатления за это время сложились в глубокий и почтительный восторг перед Вами — герои свободной, бесстрашной, исследующей мысли. Я думаю, что русские ученые, их жизнь и работа в годы войны и блокады дали миру великий урок мужества и выдержки».

Постоянная поддержка и помощь науке со стороны Коммунистической партии и Советского правительства вызвали невиданный научный подъем в нашей стране. За сравнительно короткий исторический отрезок времени советская физика, математика, механика и астрономия вышли на самые передовые рубежи мировой науки. Советские ученые успешно решили целый ряд необычайно сложных научно-технических проблем. Они создали атомное и водородное оружие, навсегда похоронив надежды империалистов на военное превосходство. Они проложили человечеству путь к мирному использованию атомной энергии. Ученые нашей страны успешно осуществляют разностороннюю программу исследования и использования космического пространства. Они оказывают огромную помощь в разработке и совершенствовании электронных вычислительных машин. Благодаря трудам наших ученых возникли целые новые области физико-математических наук.

Ученые всех стран с огромным вниманием следят теперь за развитием советской науки. Недаром многие научные журналы, выходящие в нашей стране, переводятся и переиздаются в наиболее развитых капиталистических странах. Русское слово «спутник» вошло без изменения во все языки мира, а дата запуска первого советского искусственного спутника Земли часто рассматривается в зарубежных странах как начало новой эры в организации науки и образования. Физики всех стран без перевода пользуются и другим научным термином — «Токамак», родившимся в нашей стране. «ТОроидальная КАмера в МАгнитном поле» — так назвали свою необычайно перспективную экспериментальную установку для изучения горячей плазмы и управляемых термоядерных реакций советские ученые. Подобные установки построены и строятся сейчас во многих странах.

Академия наук СССР — подлинный штаб советской науки. Она объединяет сотни крупнейших ученых, возглавляющих отдельные области современной науки в нашей стране. В ее многочисленных институтах и научных центрах, расположенных на всей территории Советского Союза, трудится огромная армия научных сотрудников.

Более четверти века на нашей планете происходит невиданная научно-техническая революция, охватившая фактически все области науки и техники. Наука на наших глазах превратилась в непосредственную производительную силу общества, она прочно объединяется с производством и оказывает на него необычайно важное, определяющее влияние. Прогресс производства — совершенствование технологии, орудий труда, способов обработки материалов, методов управления не только станками, но и целыми заводами — в наши дни неразрывно связан с прогрессом науки. Мир социализма, активно участвуя в этой революции, приобретает все необходимое для построения коммунизма. Плоды этой революции открывают нам путь к материально-технической базе коммунизма и построению коммунистического общества.

Трудно переоценить роль науки в строительстве коммунизма. Ведь такого общественного строя на Земле еще никогда не было, и учиться здесь нам просто не у кого. Научный анализ, марксистско-ленинские методы исследования — вот компас, по которому мы проверяем верность нашего пути.

Да здравствует же советская наука и ее генеральный штаб — Академия наук СССР!

Ленин о науке

Ниже приводятся высказывания В. И. Ленина, заимствованные из его работ или воспоминаний современников.

...Только социализм освободит науку от ее буржуазных пут, от ее порабощения капиталу, от ее рабства перед интересами грязного капиталистического корыстолюбия. Только социализм даст возможность широко распространить и настоящим образом подчинить общественное производство и распределение продуктов по научным соображениям относительно того, как сделать жизнь всех трудящихся наиболее легкой, доставляющей им возможность благосостояния. (В. И. Ленин. Полное собрание сочинений. Т. 36, с. 381).

...Я лично глубоко интересуюсь наукой и придаю ей громадное значение. Когда вам что нужно будет, обращайтесь прямо ко мне. (Из воспоминаний академика С. Ф. Ольденбурга)

... Ведь вот, только бы победить нам все эти интервенции, все эти внутренние восстания кулаков, помещиков и буржуазии, и тогда мы устроим так, что деятели науки, культуры, искусства, литературы — все будут обеспечены у нас так, как нигде в свете. Именно к нам будут ехать все ученые, чтобы делать всевозможные исследования, создавать лучшие лаборатории, при самых лучших возможностях исследований и постановки работ по животрепещущим научным вопросам. (Из беседы с А. М. Горьким)

... Если наука в будущем должна дать то, во что вы верите, — обновление жизни, то необходимо, чтобы те широкие массы, которые теперь стоят близко к власти, которые теперь имеют возможность регулировать жизнь, чтобы они понимали значение науки. Вы должны сделать им доступным и понятным значение тех отвлеченных истин, которые отдельные люди понимают, но которые масса, которой раньше не предоставлялось возможности подойти близко к этой науке, пока еще не понимает. (Из речи академика С. Ф. Ольденбурга на II Всесоюзном съезде Советов)

... Имейте в виду, что теперь широкие массы, стряхнув с себя старую власть, взяли свою жизнь в собственные руки, они являются вершителями жизни, в которой и вам, представителям науки, принадлежит соответствующее место. Но место это и вообще возможность надлежащим образом работать научно будет зависеть от того, насколько значение науки будет понято массами, насколько они смогут на нее посмотреть не как на праздное, ненужное для жизни времяпрепровождение, а как на тяжелый по своей сложности, необходимый и производительный труд. Мы, я и другие, конечно, понимаем значение науки, но сейчас не в нашем понимании дело, а в понимании масс. Естественно поэтому, что в первую голову внимание государства будет обращено на те науки, которые помогают нам выявлять и применять на деле наши естественные богатства, особенно нужные разоренной войнами стране, т. е. науки естественные и математические и экономические. (Из доклада академика С. Ф. Ольденбурга на Общем собрании Академии наук 22 января 1927 года)

... Узнав о согласии Вице-президента Академии наук академика В. А. Стеклова сотрудничать с Советским правительством, В. И. Ленин сказал: «Вот так, одного за другим, мы перетянем всех русских и европейских Архимедов, тогда мир, хочет не хочет, а — перевернется!» (Из речи академика А. В. Топчиева на сессии Академии наук, посвященной 90-летию со дня рождения В. И. Ленина, 21 апреля 1960 года)

Ученые о Ленине

...Нам — людям науки — особенно дорога в величавом облике Ленина его неустанная забота о процветании советской науки. С первых же дней существования Советской власти Ленин пристально занимался вопросами, связанными с развитием науки. В известных директивах Ленина еще в 1918 году четко были определены задачи Академии наук в деле экономического возрождения страны, в деле развития производительных сил нашей Родины. Мы горды тем, что Академия наук во всей своей деятельности неизменно руководствовалась указаниями Ленина. (Из речи президента Академии наук академика В. Л. Комарова 14 февраля 1944 года)

...В настоящее время наши историки, изучая подлинные материалы и документы первых лет революции, убеждаются в громадной активной роли Владимира Ильича в реформе Академии наук. Коротко говоря, дальнейшее развитие Академии, грандиозные размеры которого мы знаем теперь, было предусмотрено уже в первых указаниях Владимира Ильича. В первые же месяцы революции Владимир Ильич дал санкцию на организацию целого ряда научно-исследовательских институтов в Москве и в Ленинграде...

...В. И. Ленин с первых же шагов революции принял все меры для дальнейшего широкого роста и научных кадров, и научных учреждений. Этого требовала страна, которая должна была превратиться в страну социалистическую. Вместе с тем исключительное внимание со стороны Владимира Ильича к науке определялось, конечно, не в малой степени и тем, что сам он был величайшим ученым и оставил нам незабываемый пример как важности достигнутых результатов, так и методов научной работы. (Из речи академика С. И. Вавилова, посвященной памяти В. И. Ленина, 20 января 1940 года)

...Строя новую жизнь, осуществляя величайший в мире социальный переворот, борясь за новое Советское государство в разоренной войной, нищей и невежественной стране, Ленин не переставал думать о культурном строительстве и научном росте. С большим вниманием, с исключительной заботливостью относился он к науке и ученым. Всем известны факты его непосредственного вмешательства в вопросы, касающиеся научного строительства; вероятно, многие знают уже и о том, как много содействовал он нашей Академии наук в ее стремлении поставить и развить исследовательскую работу, нарушенную в годы войны и революции. (Из речи президента Академии наук академика А. П. Карпинского 21 января 1928 года)

...О диапазоне его знаний наглядно свидетельствуют и его богатейшее неоценимое литературное наследство, и те заметки, которые оставлены им на полях громадного количества прочитанных им книг. Просмотрите «Философские тетради» Ленина, и вам нетрудно будет видеть, какой глубокий, вдумчивый характер имели его конспекты, какую перекличку вел он в них с выдающимися представителями ученого мира. Так неустанно, изо дня в день оттачивалась острая мысль Ленина, одинаково сильная как в тонком анализе, так и в мощном синтезе...

...Владимир Ильич был не просто носителем мирового знания, он был ярчайшим представителем передовой, не отделяющей себя от народа и его нужд науки, той науки, которая создается не только для уразумения окружающих нас явлений жизни, но и для преобразований их на пользу трудящихся, науки революционеров, идущей на смену науке доктринеров. (Из воспоминаний академика Г. М. Кржижановского)

О. А. Жаутыков,
А. Г. Кубесов

Выдающийся математик средневековья

В этом году широко отмечается 1100-летие со дня рождения великого ученого и мыслителя Востока Абу Наср Мухаммед аль-Фараби. Уже в течение нескольких лет активно изучается его творческое наследие — недавно в Алма-Ате вышли «Математические трактаты» аль-Фараби.
В этой заметке рассказывается о некоторых его достижениях в области математики.

Одним из наиболее значительных культурных центров Средней Азии был Отрарский округ, расположенный в бассейне реки Сыр-Дарьи. Главный город этой области Отрар, или Фараб, как его называли арабские завоеватели, является родиной нескольких выдающихся представителей науки и культуры всего средневекового Востока. Наиболее крупным из них был великий мыслитель, ученый-энциклопедист, разносторонний математик Абу Наср Мухаммед аль-Фараби, родившийся в 870 году. Он получил образование сначала у себя дома в Отраре, а затем в Багдаде. Еще при жизни аль-Фараби получил прозвище «ал-муаллим ассани» — второго учителя. (Первым учителем «ал-муаллим аль-авзал» называли великого мыслителя античности Аристотеля.)

Аль-Фараби умер в Дамаске в 950 г.

Аль-Фараби принадлежит около ста пятидесяти трудов по самым различным отраслям знания. Почти все они написаны на арабском языке — языке науки того времени. В его научной деятельности большое место занимают физико-математические дисциплины. По свидетельству историков только по геометрии, астрономии и музыке аль-Фараби принадлежит около 70 трудов, большинство которых утрачено.

В настоящее время изучен ряд трактатов аль-Фараби. Эти сочинения опубликованы в русском переводе с подробными комментариями *). Аль-Фараби использовал арифметику, геометрию, тригонометрию в трудах по теории музыки, астрономии и математической географии. Остановимся вкратце на некоторых достижениях аль-Фараби в области математики.

Аль-Фараби в «Перечислении наук» старается по-своему определить разделы, предмет и содержание всех отраслей математики своего времени (арифметики, геометрии, оптики, математической астрономии). Он одним из первых в истории математики определяет предмет новой отрасли математики — алгебры. «Эта наука, — пишет ученый, — является общей как для арифметики, так и для геометрии. Она содержит разнообразные искусные методы нахождения чисел...». Он одним из первых устанавливает

*) Аль-Фараби. Математические трактаты. Алма-Ата, 1972.

однозначное соответствие между геометрическими величинами и числами и при этом вводит особый термин «узм» для количественной (числовой) характеристики величины. Это начинание в дальнейшем получило развитие и сыграло большую роль в создании математики переменных величин.

Вопреки сложившейся традиции аль-Фараби включает прикладную математику, как он ее называет — «науку об искусных приемах», в число основных математических разделов.

Большая заслуга принадлежит аль-Фараби в развитии геометрии, особенно конструктивной геометрии. В трактате о геометрических построениях он впервые в истории математики в систематической форме излагает методы решения многочисленных задач конструктивной геометрии, особо важные задачи на построение с помощью циркуля постоянного раствора.

Приведем одно из двух построений параболы по точкам, по-видимому, впервые предложенное аль-Фараби. Параболу он называет «лекалом зажигательного зеркала». Он пишет: «Если мы хотим построить (зажигательное) зеркало, то сначала построим лекало, определяющее зеркало. Для этого проведем круг, полурадиус которого равен величине расстояния, на котором мы хотим зажечь предмет. (Центр круга—точка E, см. рис. 1.) Проведем его диаметр AB. Отложим на линии BE от точки B несколько равных отрезков. Чем эти отрезки меньше, тем будет лучше и точнее лекало. Пусть это отрезки BC, CD и DE. Проведем через точки C, D и E линии под прямым углом (к BE) и продолжим их в обе стороны до точек K, L и M. Соединим B и K, B и L, B и M. Построим линию CN равную линии BK, линию DO, равную линии BL, линию EP, равную линии BM. Соединим точки B, N, O и P, и выполним лекало по этой линии». (Докажите правильность построения!)

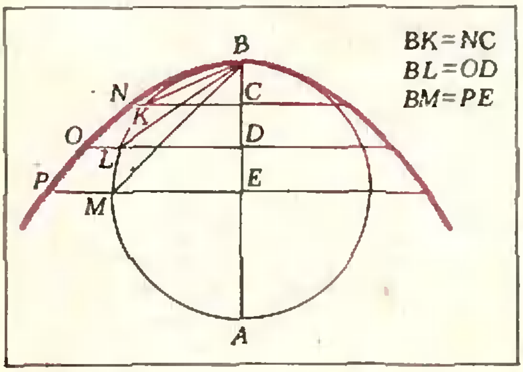


Рис. 1.

Большой интерес для истории математики представляют исследования аль-Фараби по тригонометрии. Наиболее важным является введение им линий тангенса и котангенса в тригонометрическом круге: раньше эти функции определялись только как тени гномона (шеста). Он определяет тангенс и котангенс как отрезки касательных к окружности. Аль-Фараби впервые формулирует теорему синусов для произвольного треугольника.

По аль-Фараби «синус есть половина хорды удвоенной дуги». Он добавляет к известным до него соотношениям между тригонометрическими функциями новые соотношения, в том числе

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

В «Книге приложений к «Альмагесту»*) он одним из первых доказал теорему синусов для прямоугольного сферического треугольника. Аль-Фараби широко применяет тригонометрию для решения разнообразных задач математической астрономии.

У аль-Фараби мы встречаем интересные высказывания о вероятностных понятиях. В «Трактате о том, что правильно и что неправильно в приговорах звезд» он дает оценку возможности более и менее вероятных

*) «Альмагест» — сочинение Птолемея, величайшего астронома античного мира.

событий, приводит классификацию возможностей: «невозможное», «редко возможное», «равновероятное», «возможное в большинстве случаев», «достоверное». Аль-Фараби призывает исследовать явления, «возможные в большинстве случаев», считая, что «опыт полезен в отношении явлений, возможных в большинстве случаев».

В «Большой книге музыки» и в его обработках «Альмагеста» широко рассматривались функциональные зависимости, комбинаторные задачи, инфинитезимальные идеи и другие вопросы математического содержания. Большой интерес представляют функциональные зависимости, рассмотренные аль-Фараби в связи с созданием теории музыки. Аль-Фараби, например, находит количественные соотношения между высотой звука (y) в трубе духового инструмента и другими физическими величинами в виде следующей функциональной зависимости:

$$y=\frac{k\sigma Fh}{Dd},$$

где k — коэффициент пропорциональности, D — диаметр трубы, h — расстояние отверстия от мундштука, d — диаметр отверстия, σ — характеристика гладкости, F — сила вдувания источника. Все эти соотношения выражаются словесно.

Труды аль-Фараби по математике оказали большое влияние на математическое творчество Абу-л-Вафы (940—998), Ибн Сины (980—1037), аль-Бируни (973—1050), Омара Хайяма (1048—1131), Наср ад-Дина ат-Туси (1201—1274), Роджера Бэкона (1214—1294), Леонардо да Винчи (1452—1519) и других.

Задачи наших читателей

1. Доказать, что если $a_1a_2\ldots a_n=p^n$ (p, n — целые), то справедливо неравенство

$$(a_1^2+1)(a_2^2+1)\ldots(a_n^2+1)\geqslant(p^2+1)^n.$$

С. Т. Берколайко

2. Найти возможно более простую формулу общего члена последовательности 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ...

Можно ли ее записать, используя лишь функции

$y=\sqrt{x}$, $y=[x]$

и арифметические операции?

А. М. Асташов

3. Легко проверить следующие равенства:

$$\sqrt{49}=4+\sqrt{9},$$
$$\sqrt{64}=6+\sqrt{4},$$
$$\sqrt{81}=8+\sqrt{1},$$
$$\sqrt{100}=10+\sqrt{0}.$$

Этот ряд можно продолжить следующим образом:

$$\sqrt{121}=12-\sqrt{1},$$
$$\sqrt{144}=14-\sqrt{4}.$$

Можете ли вы вывести общую формулу, объясняющую эти равенства?

С. Р. Гусейнов

4. Существует ли треугольник, у которого биссектриса делится точкой пересечения биссектрис пополам?

5. Доказать, что точка пересечения биссектрис треугольника делит каждую из них (считая от основания) в отношении, равном отношению основания треугольника к сумме двух других его сторон.

И. А. Страшкевич

Л. Г. Асламазов

Почему звучит скрипка

При движении тела в какой-либо среде возникают силы сопротивления движению, стремящиеся замедлить его. Механическому движению одного твердого тела по поверхности другого препятствуют силы сухого трения; в жидкости или газе появляются вязкое трение и аэродинамическое сопротивление и. т. п.

Взаимодействие тела со средой — довольно сложный процесс, приводящий обычно к тому, что энергия тела со временем переходит в тепло, или, как говорят физики, происходит диссипация энергии. Однако сопротивление среды может играть и обратную роль — увеличивать энергию тела. При этом, как правило, возникают колебания. Например, сила сухого трения между полозьями саней и снегом тормозит движение саней, и эта же сила, действующая между смычком и струной, вызывает колебания струны. Как вы увидите дальше, причиной возникновения колебаний является падающая зависимость силы трения от скорости движения. Колебания возникают тогда, когда сила трения уменьшается при увеличении скорости.

Аналогичные явления происходят не только в механических, но и в электрических системах, в которых колебания возбуждаются при падающей зависимсти напряжения от силы тока.

Рассмотрим сначала процесс возникновения механических колебаний.

Колебания струны

Звучание скрипки вызывается движением смычка. Невозможно, конечно, объяснить здесь все сложные явления, связанные с особенностями звучания скрипки. Однако попробуем разобраться, почему возникают колебания скрипичной струны, когда по ней ведут смычком.

Силы трения между смычком и струной — это силы сухого трения. Можно говорить о силах трения покоя и о силах трения скольжения. Первая сила возникает между соприкасающимися, но неподвижными друг относительно друга телами, вторая — при скольжении одного тела по поверхности другого.

Сила трения покоя, как известно, может принимать любые значения (в зависимости от внешней силы) от нуля до максимальной силы трения покоя $F^0_{тр}$, при этом она всегда равна по величине и противоположна по направлению внешней силе.

Сила трения скольжения зависит от материала тел и от состояния трущихся поверхностей, а также от относительной скорости этих тел. О последнем мы и будем говорить более подробно. Характер зависимости от скорости для разных тел различен; нередко при увеличении скорости скольжения вначале происходит уменьшение силы трения скольжения, а затем она начинает возрастать. График зависимости абсолютной величи-

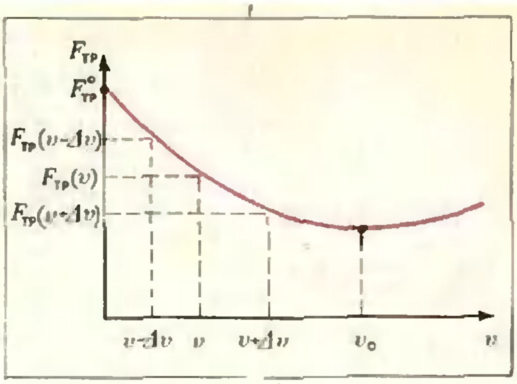


Рис. 1.

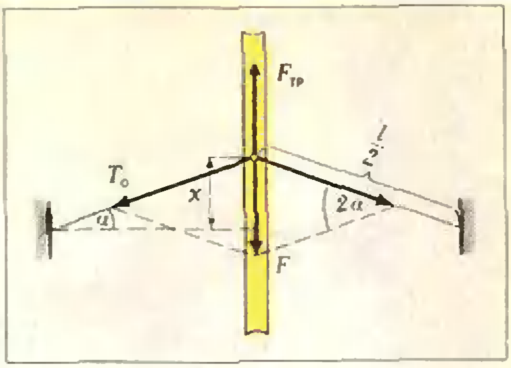


Рис. 2.

ны силы сухого трения от скорости в этом случае показан на рисунке 1. В скрипке силы трения между смычком и струной как раз и имеют такой характер. Вертикальный участок при $v=0$ соответствует силам трения покоя. Если относительная скорость струны и смычка v соответствует падающему участку $0<v<v_0$, то увеличению относительной скорости на некоторую малую величину Δv соответствует уменьшение силы трения, и наоборот, при уменьшении скорости соответствующее изменение силы трения положительно (см. рис. 1). Как вы сейчас увидите, именно благодаря этой особенности может увеличиваться энергия струны за счет работы сил сухого трения.

При движении смычка струна отклоняется вместе с ним. При этом сила трения покоя уравновешивается силами натяжения струны (рис. 2). Равнодействующая F сил натяжения пропорциональна отклонению струны x от положения равновесия:

$$F=2T_0\sin\alpha=\frac{4T_0}{l}x,$$

где l — длина струны, а T_0 — сила натяжения струны, которую при малых отклонениях можно считать постоянной. Поэтому при движении струны вместе со смычком сила F будет расти, и в тот момент, когда она станет равной максимальной силе трения покоя $F^0_{тр}$, начнется проскальзывание.

Будем пока для простоты считать, что в момент начала скольжения изменение силы трения происходит скачком: она уменьшается от максимальной величины силы трения покоя до небольшой силы трения скольжения. Иными словами, после начала скольжения движение струны можно считать почти свободным.

В момент срыва скорость струны равнялась скорости смычка, и вначале струна будет продолжать двигаться в сторону движения смычка. Но теперь равнодействующая сил натяжения ничем не скомпенсирована, поэтому она будет тормозить движение струны, замедляя его. В какой-то момент скорость струны упадет до нуля, затем струна начнет двигаться в противоположную сторону, и после максимального отклонения от положения равновесия она опять будет двигаться в сторону движения смычка. А смычок продолжает двигаться равномерно со скоростью u. В некоторый момент скорости струны и смычка сравняются. При этом между струной и смычком проскальзывания уже нет, и появляется сила трения покоя, равная равнодействующей сил натяжения.

При дальнейшем движении струны до положения равновесия силы натяжения уменьшаются и, соответственно, уменьшается сила трения покоя. После прохождения струной положения равновесия процесс повторяется.

Соответствующий график зависимости отклонения струны от времени показан на рисунке 3, *а*. Движение струны периодическое, причем в каждом периоде имеется два разных участка. Например, на участке $0<t<t_1$ струна движется вместе со смычком с постоянной скоростью u, так что отклонение x линейно зависит от времени ($\operatorname{tg}\alpha = u$). В момент t_1 происходит срыв, и при $t_1<t<t_2$ изменение x со временем происходит по синусоидальному закону. В момент t_2, когда касательная к синусоиде имеет тот же наклон, что и начальный прямолинейный участок (условие равенства скоростей), струна вновь захватывается смычком.

Рисунок 3, *а* соответствует идеальному случаю, когда сила трения скольжения отсутствует и поэтому нет потерь энергии при свободном ходе струны. Полная работа силы трения покоя на линейных участках за период при этом также равна нулю, так как при отрицательных x совершается отрицательная работа (сила трения направлена против движения), а при $x>0$ совершается такая же по величине, но положительная работа.

Что же происходит в случае, когда сила трения скольжения отлична от нуля? Трение скольжения приводит к потерям энергии. Движение струны при проскальзывании теперь описывается графиком, показанным на рисунке 3, *б*. При отрицательных отклонениях эта кривая более пологая, чем при положительных. Поэтому зацепление струны смычком происходит при меньшем по величине отрицательном отклонении x_2, чем *положительное отклонение* x_1, соответствующее срыву. В результате сила трения покоя во время сцепления струны со смычком совершает за период положительную работу

$$A = \frac{k\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{2},$$

где $k = \frac{4T_0}{l}$ — коэффициент пропорциональности между величиной силы трения покоя и отклонением струны.

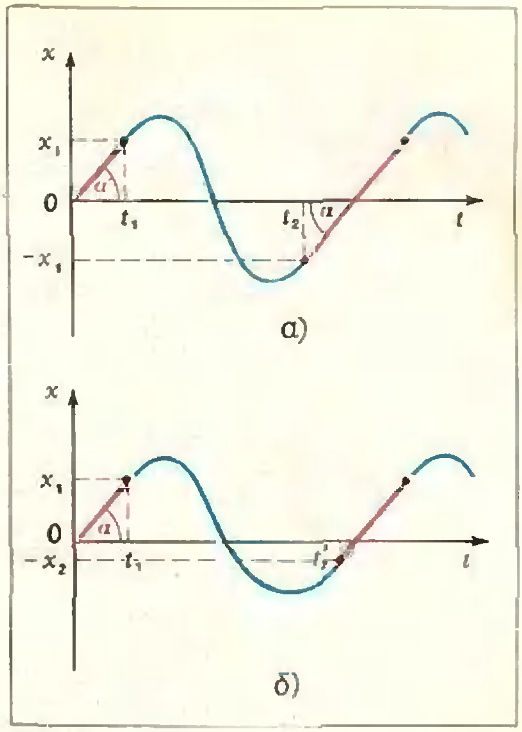


Рис. 3.

Эта работа как раз и компенсирует потери энергии за счет сил трения скольжения. Колебания струны являются незатухающими.

Энергетический баланс

Вообще говоря, для пополнения энергии струны за счет сил трения не обязательно, чтобы происходило сцепление струны со смычком. Достаточно, чтобы относительная скорость смычка и струны при колебаниях струны находилась в пределах падающего участка зависимости силы трения скольжения от скорости. Рассмотрим более подробно явление возбуждения колебаний струны в этом случае.

Пусть смычок опять движется с некоторой постоянной скоростью u, а струна отклонена от положения равновесия на x_0 так, чтобы равнодействующая $F(x_0)$ сил упругости уравновешивала силу трения скольжения $F_{тр}(u)$. Если струна случайно отклонится в сторону движения смычка, то относительная скорость уменьшится. В результате сила трения возрастет (относительная скорость соответствует падающему участку!), и струна отклонится еще больше. При дальнейшем отклонении упругая сила в какой-то момент обязательно превысит силу трения (упругая сила пропорциональна величине отклонения, а сила трения скольжения не может превзойти максимального значения силы трения покоя), и струна начнет двигаться в обратную сторону. Она пройдет положение равновесия, снова отклонится, остановится и т. д. Таким образом возбудятся колебания струны.

Важно, что эти колебания будут незатухающими. В самом деле, при движении струны со скоростью Δv в сторону смычка сила трения совершает положительную работу, а при обратном движении — отрицательную. Но относительная скорость $v_1 = u - \Delta v$ в первом случае меньше, чем скорость $u_2 = u + \Delta v$ во втором случае, а следовательно, сила трения $F_{тр}(u - \Delta v)$, наоборот, больше, чем $F_{тр}(u + \Delta v)$. Таким образом, положительная работа сил трения при движении струны в сторону смычка больше, чем отрицательная работа при ее возвратном движении, и в целом силы трения совершают положительную работу. Амплитуда колебаний будет увеличиваться. Однако лишь до определенного предела. При $v > v_0$ (см. рис. 1) скорость выходит за пределы падающего участка, и тогда отрицательная работа силы трения уже может стать больше, чем положительная. Энергия, а значит, и амплитуда колебаний будут уменьшаться.

В результате установится такая амплитуда колебаний, при которой полная работа сил трения равна нулю (говоря точнее, эта работа компенсирует потери энергии вследствие сопротивления воздуха, неупругого характера деформаций и т. п.). С этой постоянной амплитудой и будут происходить незатухающие колебания струны.

Возбуждение звуковых колебаний при движении одного твердого тела по поверхности другого происходит очень часто. Сухое трение в дверной петле может вызвать скрип двери. Скрипят половицы, обувь. Скрип можно произвести просто пальцем, проведя им по какой-нибудь гладкой поверхности. Явления, происходящие при этом, во многом аналогичны возбуждению колебаний скрипичной струны. Вначале проскальзывания нет, и возникает упругая деформация. Затем происходит срыв, и возбуждаются колебания тела. Колебания не затухают, так как благодаря падающей характеристике сил сухого трения поставляется необходимая энергия за счет работы этих сил.

При изменении характера зависимости сил трения от скорости скрип исчезает. Известно, например, что для этого достаточно смазать трущиеся поверхности. Сила жидкого трения (при малых скоростях) пропорциональна скорости, и условий, необходимых для возбуждения колебаний, нет. Наоборот, когда хотят возбудить колебания, поверхности обрабатывают специальным образом, чтобы сделать уменьшение сил трения при увеличении скорости более резким. Смычок скрипки, например, для этого натирают канифолью.

Знание законов сил трения помогает решать важные практические задачи. При обработке металла на токарном станке иногда возникает вибрация резца. Эти колебания вызываются силами сухого трения между резцом и металлической стружкой, скользящей по его поверхности при обточке металла (рис. 4). Зависимость силы трения от скорости стружки (скорости обработки) для ряда высококачественных сталей оказывается падающей. Этим, как мы уже знаем, можно объяснить колебания резца.

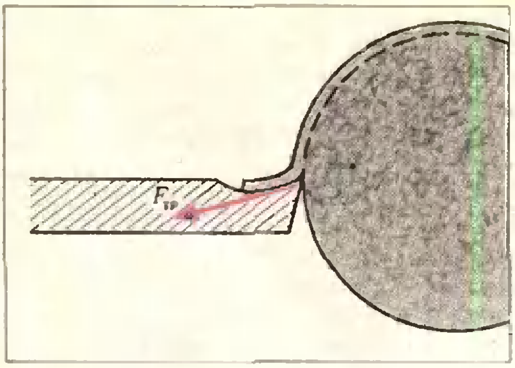


Рис. 4.

Для борьбы с вибрацией используется, например, специальная заточка резца, при которой нет скольжения стружки. Тем самым устраняется причина возникновения колебаний.

Отрицательное сопротивление

Теперь речь пойдет об аналогичных явлениях (возникновения колебаний) в электрических системах. Для описания электрической системы удобно пользоваться вольтамперной характеристикой, т. е. зависимостью напряжения в системе от силы тока. Например, для обычного сопротивления справедлив закон Ома: напряжение пропорционально току, и вольтамперная характеристика — прямая линия, проходящая через начало координат. Однако для многих систем (электронной лампы, газоразрядной трубки, транзистора и т. п.) зависимость напряжения от тока более сложная.

Оказывается, что в том случае, если вольтамперная характеристика является падающей, т. е. если при увеличении тока через систему напряжение на ней уменьшается, в системе могут возбуждаться электрические колебания. Такими свойствами обладают некоторые полупроводниковые устройства, неоновая лампа, электрическая дуга и т. д. У всех этих приборов вольтамперная характеристика имеет падающей участок, и это в определенных условиях приводит к возбуждению колебаний.

Попробуем разобраться в причинах возникновения электрических колебаний при падающей вольтамперной характеристике. Прежде всего проведем аналогию с механическими системами. При прохождении тока по проводнику электрические силы совершают работу, пропорциональную приложенному напряжению. Эта работа равна работе сил сопротивления движению зарядов. Поэтому можно сказать, что силы сопротивления пропорциональны напряжению. С другой стороны, скорость направленного движения зарядов связана прямой пропорциональной зависимостью с силой тока. Таким образом, падающая зависимость напряжения от силы тока соответствует падающей зависимости силы сопротивления от скорости, а это, как мы уже знаем, приводит к возбуждению колебаний.

Проведем теперь более подробный анализ условий возникновения электрических колебаний, используя такие же, как в механике, энергетические соображения. Пусть вольтамперная характеристика системы такая, как показано на рисунке 5. Зная ток, по этой характеристике можно найти напряжение, и наоборот. Пусть, например, в системе течет постоянный ток i_0; тогда напряжение равно U_0. Если по каким-либо причинам возникла также небольшая переменная составляющая тока, так что

$$i = i_0 + \Delta i_0 \sin \omega t,$$

то напряжение тоже станет переменным:

$$U = U_0 + \Delta U_0 \sin \omega t$$

(Δi_0 и ΔU_0 — амплитуды переменной составляющей тока и напряжения соответственно). Очевидно, что при падающей вольтамперной характеристике переменный ток и переменное напряжение колеблются в противо-

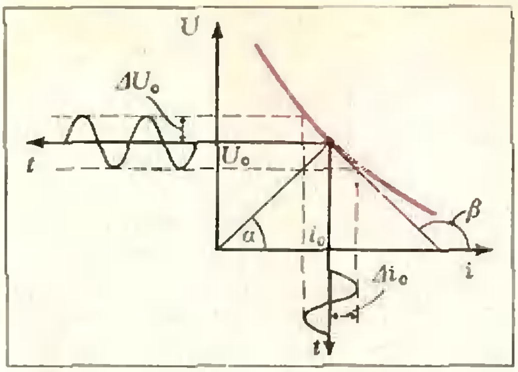


Рис. 5.

фазе (ток и напряжение одновременно проходят положение равновесия, но знаки тока и напряжения в одинаковые моменты всегда разные и, следовательно, сдвиг фаз $\varphi = \pi$).

Мощность переменного тока, как известно, определяется формулой

$$P = \frac{\Delta U_0\, \Delta i_0}{2} \cos\varphi = \Delta U_д\, \Delta i_д \cos\varphi,$$

где $\Delta U_д$ и $\Delta i_д$ — действующие значения напряжения и тока, φ — сдвиг фаз между напряжением и током. В нашем случае $\cos\varphi = -1$ и, следовательно, $P < 0$. Этот результат имеет простой физический смысл. Он означает, что переменный ток не расходует, а наоборот, увеличивает свою энергию (так же, как увеличивалась при колебаниях энергия струны за счет падающей зависимости сил сопротивления от скорости). Эта энергия, очевидно, черпается из энергии постоянного тока, мощность которого $P_0 = U_0 i_0$ всегда положительна. Таким образом, при падающей вольтамперной характеристике энергия переменного тока со временем будет увеличиваться, и амплитуда колебаний будет нарастать.

Для количественного рассмотрения этого вопроса вводят понятие отрицательного электрического сопротивления, которым обладают системы с падающими вольтамперными характеристиками. Впрочем, понятие сопротивления при нелинейной зависимости напряжения от тока требует некоторого уточнения. Поговорим об этом более подробно.

Если через систему при постоянном напряжении U_0 течет постоянный ток i_0, то сопротивление определяется по формуле

$$R = U_0/i_0$$

и называется статическим сопротивлением, или сопротивлением постоянному току. Как видно из рисунка 5, эта величина равна тангенсу угла наклона прямой, проведенной из начала координат в точку вольтамперной характеристики, соответствующую току i_0 и напряжению U_0:

$$R = \operatorname{tg}\alpha.$$

Эта величина, вообще говоря, зависит от силы тока i_0. Если у системы характеристика линейная, то R совпадает с обычным сопротивлением проводника и не зависит от тока.

В случае переменного тока вводится понятие дифференциального сопротивления, или сопротивления переменному току r. Оно определяется тангенсом угла наклона касательной к вольтамперной характеристике (см. рис. 5): $r = \operatorname{tg}\beta$ и по абсолютной величине равно отношению амплитуд переменного напряжения и тока: $|r| = \Delta U_0/\Delta i_0$. Для обычного проводника $r = R$, однако в общем случае нелинейной вольтамперной характеристики сопротивления постоянному и переменному току разные.

Если вольтамперная характеристика имеет падающий участок, то на этом участке касательная к кривой составляет тупой угол с осью токов (угол β на рисунке 5), тангенс этого угла отрицателен и, следовательно, отрицательна величина r. Таким образом, системы с падающей вольтамперной характеристикой обладают отрицательным дифференциальным сопротивлением.

Мощность переменного тока $P = (\Delta i_д)^2 r = (\Delta U_д)^2/r$ на отрицательном сопротивлении r — отрицательная. Это опять отражает тот факт, что энергия переменного тока при

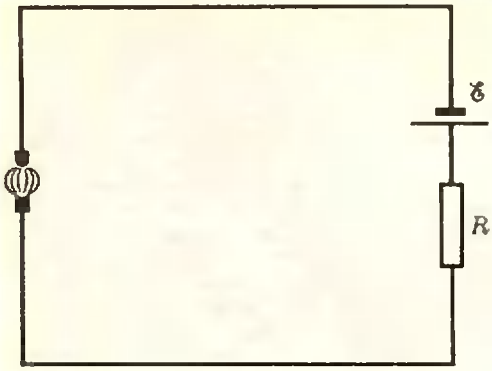


Рис. 6, *а*.

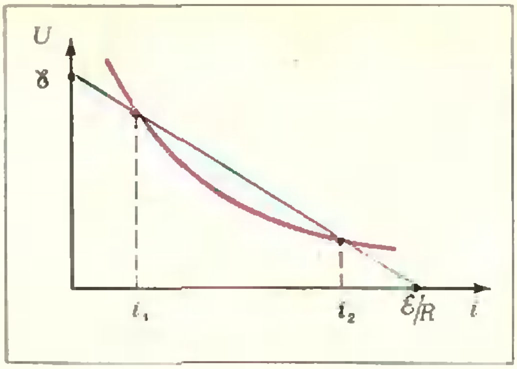


Рис. 6, *б*.

падающей вольтамперной характеристике увеличивается со временем.

Используя понятие отрицательного сопротивления, исследуем, например, устойчивость электрической дуги (рис. 6, *а*), включенной последовательно с обычным сопротивлением R и источником постоянной э. д. с. $\mathcal{E}$ (будем считать, что внутреннее сопротивление источника тока включено в сопротивление R). Эта задача имеет практическое значение, так как при использовании дуги для сварки или в качестве источника света она должна гореть устойчиво, без колебаний тока.

Прежде всего найдем, какой постоянный ток может течь в такой цепи. По закону Ома для всей цепи сумма падений напряжения равна электродвижущей силе:

$$U(i) + iR = \mathcal{E}.$$

Перенеся слагаемое iR в правую часть, получим, что напряжение на дуге $U(i)$ равно $\mathcal{E} - iR$. С другой стороны, $U(i)$ определяется вольтамперной характеристикой. Поэтому возможные токи можно найти графически как точки пересечения вольтамперной характеристики и зависимости $\mathcal{E} - iR$, причем последняя, очевидно, изображается прямой с отрицательным наклоном (рис. 6, *б*).

Как видно, в принципе, имеются два пересечения и, соответственно, в цепи возможны два значения тока i_1 и i_2. Оба ли тока устойчивы?

При возникновении переменного тока его амплитуды на дуге и на сопротивлении R одинаковы (они включены последовательно). Поэтому, сравнивая генерируемую на отрицательном сопротивлении дуги энергию $(\Delta i_д)^2 r$ и потери энергии на обычном сопротивлении $(\Delta i_д)^2 R$, мы видим, что условием нарастания колебаний будет $|r| > R$. Обратимся теперь опять к рисунку 6, *б*. Легко видеть, что при токе i_1 дуга имеет большее по абсолютной величине отрицательное сопротивление, чем R (наклон касательной больше, чем у прямой), и условие возникновения колебаний выполнено. При токе i_2, наоборот, $R > |r|$, и колебания не могут возникнуть. Таким образом, можно сказать, что дуга будет гореть устойчиво при положительном полном сопротивлении цепи.

Если дугу включить в колебательный контур, то в нем могут возникнуть *незатухающие колебания*. Для этого необходимо, чтобы полное сопротивление контура (сумма обычного сопротивления контура и отрицательного сопротивления дуги) было бы отрицательным. Однако для получения незатухающих электромагнитных колебаний сейчас используют не вольтову дугу, а более надежные электрические системы с отрицательным сопротивлением. Сюда относится, например, ламповый генератор (в котором отрицательное сопротивление создается за счет обратной связи между сеткой и анодом лампы),

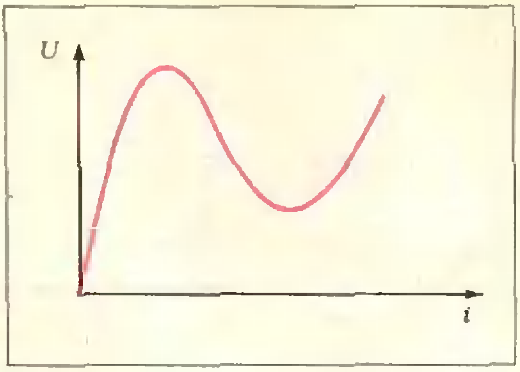


Рис. 7.

а также различные полупроводниковые устройства с падающими вольтамперными характеристиками. Таким образом работают многие современные генераторы электромагнитных колебаний.

Упражнения

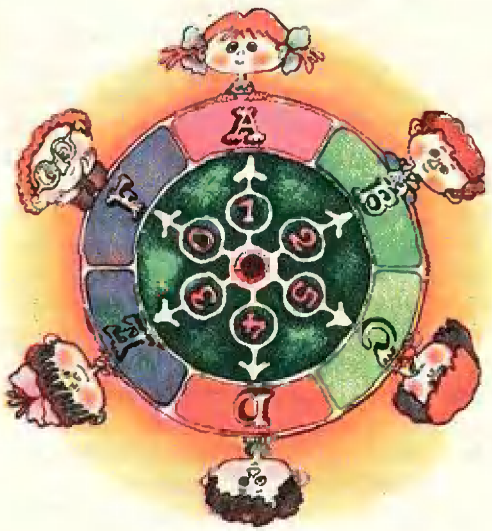
1. Маятник подвешен с помощью втулки на равномерно вращающуюся горизонтальную ось. Объясните, почему, если трение между втулкой и осью — сухое, возможно возникновение незатухающих колебаний (так называемый маятник Фроуда).

2. Вольтамперная характеристика электрического разряда в газах в некоторых случаях имеет N-образный вид (рис. 7). По заданной вольтамперной характеристике разряда нарисуйте зависимость силы тока в цепи, состоящей из последовательно соединенных разрядной трубки, сопротивления R и источника постоянной э. д. с. $\mathcal{E}$, от величины сопротивления R.

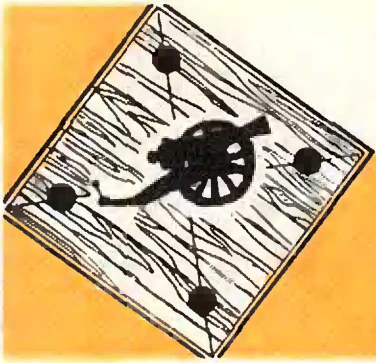
3. Покажите с помощью закона Ома, что ток в цепи последовательно соединенных вольтовой дуги, сопротивления и источника постоянной э. д. с. устойчив при положительном полном сопротивлении цепи.

4. Вольтова дуга, включенная в колебательный контур, иногда начинает «петь», воспроизводя довольно чистые музыкальные тона. Объясните это явление.

Кто победил?



Представьте себе круглый стол разделенный на 6 равных секторов: A, B, C, D, E, F,— за которым сидят 6 игроков, каждый у своего сектора (см. рисунок). В центре стола — вращающийся диск. На нем нанесены стрелки и цифры от 0 до 5, как показано на рисунке. Во время игры диск вращают 5 раз. После каждого вращения каждый игрок отмечает число, которое окажется у его сектора (если стрелки укажут на границу секторов, то данное вращение не учитывают). Побеждает игрок, у которого окажется наибольшая сумма очков после 5 вращений. На рисунке вы видите распределение очков после первого вращения, в результате которого вышел вперед с пятью очками игрок C. Известно также, что после второго вращения впереди оказался D. Наконец, после 5 вращений победил игрок A. Вот и все, что известно о результатах игры. Казалось бы, не так много. Но этого совершенно достаточно, чтобы определить, сколько очков получил в итоге каждый игрок. Попробуйте!



Физика и линейные неравенства

З. Я. Тьмеладзе

Механика

Пушки революции грохотали на улицах Парижа. Картечь гвардейцев взрябила штукатурку у самой баррикады.

— Ты ранен, Этьен?

— Пустяки, царапина. Королевские гвардейцы стреляют из того особняка с колоннами. Если мы их не выбьем оттуда, нам не продержаться до прихода отряда печатников.

— А наша пушка их не достанет?

— Нет, мало толку от этой махины. Вот если бы ее удалось вкатить на ту площадку! Эй, Жан-Батист... Ох, это уже серьезнее,— простонал Этьен, схватившись за грудь.

— Что с вами, мосье?

— Гражданин Этьен, а не мосье! Ты уже не в монастыре бенедиктинцев, мальчик, а в революционной армии. Пока меня перевязывают, вкати с ребятами пушку вон на ту площадку.

— Слушаюсь, гражданин Этьен!

— Постойте,— вмешался Пьер.— А выдержит ли площадка? Если она рухнет, мы лишимся единственной пушки.

— Это наш последний шанс,— прошептал Этьен, теряя сознание.

— Что ты там рисуешь, Жан-Батист? Снова геометрия? Берись лучше за ружье, а пушкой нам нельзя рисковать!

— Гражданин Пьер! Пользуясь затишьем, я готов доказать вам, что никакого риска нет. Пушку можно вкатывать.

— Ну, попробуй! Я ведь пришел на баррикады из университета, из этого болота, где процветают бездарности. Клянусь не возвращаться туда, пока профессорам не запретят читать лекции по шпаргалкам. Итак?

— Площадка имеет форму квадрата со стороной в 4 метра, она опирается на четыре столба (см. рис. 1). Каждый столб выдерживает одну тонну, а пушка вместе с расчетом и ядрами весит 2,5 тонны. Сама площадка надежна, могут сломаться только столбы, не так ли, гражданин Пьер?

— Допустим; но учти, столбы вместе выдержат 4 тонны только в том случае, если положить груз в центр площадки. А пушку нам придется сдвинуть, так что ее центр тяжести будет в точке M — иначе не прострелять особняк.

— Давайте теперь определим, какую максимальную силу можно при-

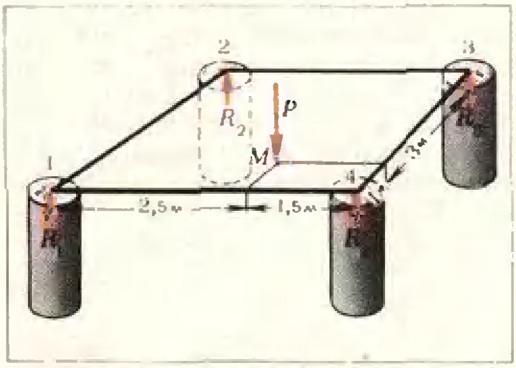


Рис. 1.

ложить в точке M. Если эта сила больше веса пушки — то все в порядке, и мы заставим гвардейцев дорого заплатить за смерть Этьена. Обозначим усилия в столбах, на которые опирается площадка, через R_1, R_2, R_3 и R_4 и потребуем, чтобы было

$$\begin{cases} R_1 \leqslant 1, \\ R_2 \leqslant 1, \\ R_3 \leqslant 1, \\ R_4 \leqslant 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Положительные значения усилий указывают на сжатие в столбах, отрицательные — на растяжение.

— Так-то оно так, но что из этого? Ведь это неравенства, а не уравнения, что о них можно сказать? Не помню, чтобы о них писали что-либо славные граждане Лагранж и Даламбер.

— И я не помню, хотя и изучал их труды. Но продолжим рассуждения. Силы R_1, R_2, R_3 и R_4 не могут быть любыми, они должны удовлетворять условиям равновесия. Два из них получатся, если приравнять нулю моменты от всех сил, действующих на площадку, относительно линий *1—4* и *1—2*. Учитывая, что момент — это произведение силы на плечо, получаем два уравнения:

$$4R_2 + 4R_3 - P = 0, \qquad (2)$$

$$4R_3 + 4R_4 - 2{,}5P = 0. \qquad (3)$$

Третье уравнение равновесия нужно получить из равенства нулю суммы всех сил, действующих на площадку — иначе эта площадка упала бы вниз или вознеслась на небо.

— Подобно тому ловкачу, которого так чтят церковники[1] — вставил Пьер.

— Отсюда получаем уравнение

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = P, \qquad (4)$$

— записал Жан-Батист, покраснев скорее из-за богохульственной остроты вольнодумца, чем из-за пули, просвистевшей у его уха. Из трех уравнений (2), (3) и (4) четыре неизвестных R_1, R_2, R_3, R_4, конечно, не определить. Но можно добавить такое условие: сила P должна быть максимальна. Запишем его так: $P \to \max$. Кроме того, у нас есть еще неравенства (1).

— Чудна́я задача,— сморщил лоб гражданин Пьер.— Я не удивлюсь, если еще лет сто пятьдесят она не будет иметь названия. Не говорю уж о гражданах Даламбере и Лагранже, у которых ее почему-то...

— Оставим в стороне пророчества и тени великих и решим эту несложную задачу,— продолжал Жан-Батист.— Для этого выразим из уравнений (2) и (3) R_3 и R_4:

$$R_3 = \frac{1}{4}P - R_2,$$

$$R_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}P - 4R_3\right) = \frac{3}{8}P + R_2 \qquad (5)$$

и подставим их значения в уравнение (4); получим:

$$R_1 + R_2 + \frac{1}{4}P - R_2 + \frac{3}{8}P + R_2 = P.$$

Отсюда можно найти P:

$$P = \frac{8}{3}(R_1 + R_2) \qquad (6)$$

и подставить в уравнения (5):

$$R_3 = \frac{2}{3}R_1 - \frac{1}{3}R_2, \quad R_4 = R_1 + 2R_2.$$

Теперь систему неравенств (1) можно переписать лишь для двух переменных R_1 и R_2 (остальные исключены с помощью трех уравнений):

$$\begin{cases} R_1 \leqslant 1, \\ R_2 \leqslant 1, \\ \frac{2}{3}R_1 - \frac{1}{3}R_2 \leqslant 1, \\ R_1 + 2R_2 \leqslant 1. \end{cases} \qquad (7)$$

— Хорошо, но нельзя ли поскорее? Огонь усиливается.

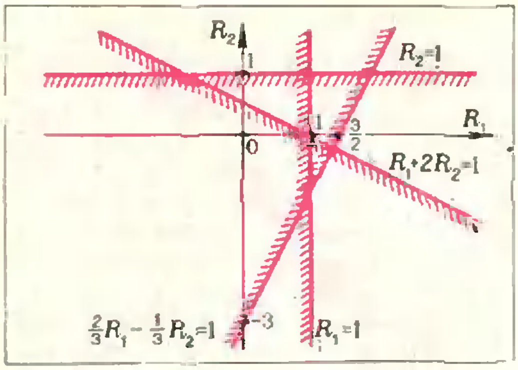


Рис. 2.

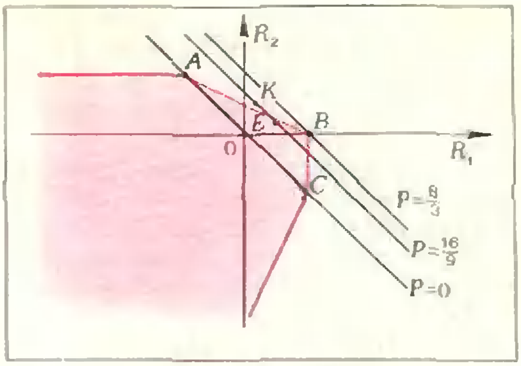


Рис. 3.

— *Осталось немного. Давайте изобразим эти неравенства графически.* Введем оси координат R_1 и R_2 (рис. 2).

Неравенство $R_1 \leqslant 1$ означает, что допустимые значения R_1 должны лежать не правее линии $R_1 = 1$, а $R_2 \leqslant 1$,— что не выше линии $R_2 = 1$ — обозначим это штриховкой. Полагая $R_1 = 0$, из третьего неравенства системы (7) находим $R_2 \geqslant -3$, а полагая $R_2 = 0$, получаем $R_1 \leqslant 3/2$. Проведя через точки с координатами $(0, -3)$ и $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ прямую и заштриховав ее сверху, получим графический образ третьего неравенства. Наконец, таким же способом изображаем и четвертое неравенство.

— Но, кажется, не все эти линии нужны.

— Верно! Самое существенное представлено на рисунке 3, где закрашена допустимая область значений сил R_1 и R_2. Точки внутри этой области, включая границу, удовлетворяют всем неравенствам. Но это еще не все. В допустимой области нужно найти такую точку, в которой P, определяемое равенством (6), принимает наибольшее значение. Для начала построим линию

$$P = \frac{8}{3}(R_1 + R_2) = 0.$$

Она проходит через начало координат, как показано на рисунке 3.

— *Но это нам мало что дает:* ясно, что нулевую силу площадка выдержит.

— Разумеется. Но почему выдержит? Потому, что линия $P = 0$ пересекает допустимую область.

— Постой! Мне не совсем понятно. На линии $P = \frac{16}{9}$ есть точки, которые лежат вне допустимой области, скажем, точка K. Если в столбах возникнет распределение усилий, отвечающее этой точке, то площадка рухнет и...

— Вы не правы. Хотя я и не умею этого доказать, но чувствую: *если материал столбов пластичен, то конструкция не разрушится при* $P = \frac{16}{9}$. В ней возникнет распределение усилий, выражаемое какой-то точкой E внутри допустимой области. Правда, неизвестно, какой именно точкой, но это уже неважно.

Рассмотрим теперь семейство линий $P = \frac{8}{3}(R_1 + R_2) = \mathrm{const} > 0$. Они параллельны линии $P = 0$ (ведь угловые коэффициенты у них одни и те же). Из этих линий нужно выбрать ту, которая дальше всего отстоит от линии $P = 0$, но при этом пересекает допустимую область. Это линия $P = \frac{8}{3}(1 + 0) = \frac{8}{3}$, проходящая через точку B с координатами $R_1 = 1$, $R_2 = 0$. Понятно?

— Честно говоря, не совсем. Давно не занимался математикой. Революция требует от меня, чтобы я чаще заглядывал в географические карты, чем в учебник геометрии.

— Отлично! Вспомним географию! Представьте себе, что ABC — это граница участка на местности, который равномерно повышается с юго-запада на северо-восток, а линии $P = \text{const}$ — это горизонтали на географической карте. Чем выше отметка местности, тем больше в ней значение P. Ясно, что самая высокая отметка будет в точке B, где $P = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. Это больше, чем весит наша пушка $\left(2\frac{2}{3} > 2\frac{1}{2}\right)$. Значит, пушку площадка выдержит.

— Закатывайте, граждане, пушку! — закричал Пьер вместо ответа: натиск гвардейцев нарастал, и медлить дальше было нельзя.— Гражданин Жан-Батист Фурье! Именно ты должен быть профессором математики! Смерть тиранам!

И Жан-Батист Фурье стал профессором математики созданного в 1794 году нового учебного заведения — Нормальной школы! Бездарные конкуренты не смогли этому помешать: в том же году революционный Конвент действительно издал закон, запрещавший профессорам пользоваться во время лекций записками.

Рождение линейного программирования

Только на склоне лет, в 1823 году, признанный математик Жан-Батист Фурье (1768—1830), бывший друг Наполеона, бывший префект департамента Изер и создатель «Теории теплоты», выступил во Французской Академии с несколько странным по тем временам докладом о линейных неравенствах, в котором он рассказал постановку и указал путь решения описанной выше задачи. Но не была ли она ясна ему раньше, когда юношей он попал в революционный Париж? Ведь ничего особенно сложного в этой задаче нет — во всяком случае, теория рядов Фурье, принадлежащая тому же автору, куда сложнее.

Тем не менее название этой задачи — *линейное программирование* — родилось лишь в сороковых годах нашего века. Самые известные приложения линейного программирования связаны с экономикой *). Однако необходимость найти экстремум линейной функции при ограничениях в виде системы линейных уравнений и неравенств возникает в самых разнообразных задачах, в том числе и весьма далеких от экономики. Примером служит рассмотренная выше задача механики о действии сосредоточенной силы на квадратную пластинку — первое известное нам приложение линейного программирования.

В более общем виде задача линейного программирования формулируется так. *Имеется n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Требуется найти такие их значения, которые удовлетворяют системе ограничений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant a_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n \leqslant a_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant a_m \end{cases}$$

и доставляют максимум функции

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n,$$

носящей название «целевой». Коэффициенты $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ и свободные члены $a_1, \ldots, a_m$ при этом считаются заданными.

---

*) См. статью: А. Б. Каток, Экономика и линейные неравенства, «Квант» 1971, № 3, 4.

Иногда вместо максимума целевой функции требуется найти ее минимум — это зависит от смысла задачи (в этом случае можно искать максимум функции $z_1 = -z$). Заметим, что экстремум функции z (минимум или максимум) всегда находится на границе допустимой области. Это обстоятельство использует самый распространенный метод решения задачи линейного программирования — симплекс-метод, которого мы здесь не касаемся.

А как же все-таки быть с физическим обоснованием задачи Фурье? Прав ли он был, считая, что сама природа помогает конструкции найти то, быть может, единственное распределение внутренних усилий, при котором конструкция способна выдержать внешнюю нагрузку? Да, для пластичного материала это так. Собственно, механики подозревали это обстоятельство еще до Фурье, но строгая теория была построена лишь в 1936 году советским ученым А. А. Гвоздевым. Согласно этой теории, конструкция как бы сама, повинуясь силам природы, решит вышеупомянутую задачу линейного программирования и найдет для себя наилучшее распределение внутренних усилий. Найдет, если оно существует,— при нагрузке в 3 тонны на упомянутую площадку безопасного распределения усилий в столбах уже не найдется, и площадка рухнет.

Электричество

Чтобы убедиться в применимости линейного программирования к электрическим сетям, перенесемся с улиц Парижа в современную школу. Изобретатели Витя и Коля собирают таинственное устройство (о назначении которого они просили не говорить) по схеме, представленной на рисунке 4.

Устройство состоит из двух источников ЭДС, трех сопротивлений и трех приборов, названия которых

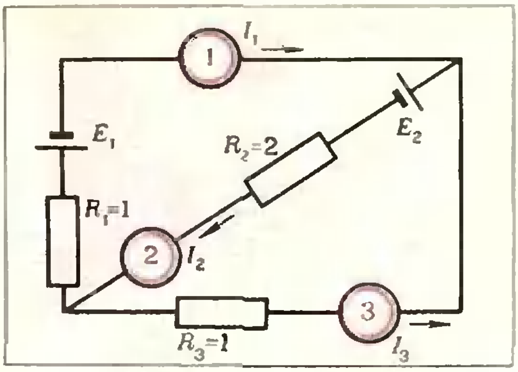


Рис. 4.

представляют профессиональную тайну изобретателей. Нам удалось только узнать, что прибор № 1 требует тока не менее чем 2 *а*, прибор № 2 — не менее 1 *а*, а на приборе № 3 напряжение должно быть не менее 1,5 *в*. Все было готово к началу эксперимента, когда выяснилось неожиданное затруднение: у Вити и Коли оказалось всего 5 батареек с ЭДС 1 *в* каждая. Попытки включать их наугад к успеху не приводили: приборы не срабатывали. Изобретатели зашли было в тупик, но тут Коля вспомнил о линейном программировании и начал рассуждать.

— Задачу можно сформулировать следующим образом. Требуется подобрать источники ЭДС, чтобы они обеспечивали заданные токи и напряжения в сети и сумма ЭДС была минимальной:

$$z = E_1 + E_2 \to \min. \qquad (8)$$

Формула (8) определяет целевую функцию задачи линейного программирования. Составим ограничения. Сумма токов в каждом узле сети должна быть равна нулю:

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0. \qquad (9)$$

Сеть состоит из двух контуров, вдоль каждого из которых суммарное падение напряжений должно равняться сумме ЭДС:

$$\begin{aligned} I_1 + 2I_2 &= E_1 + E_2, \\ 2I_2 + I_3 &= E_2. \end{aligned} \qquad (10)$$

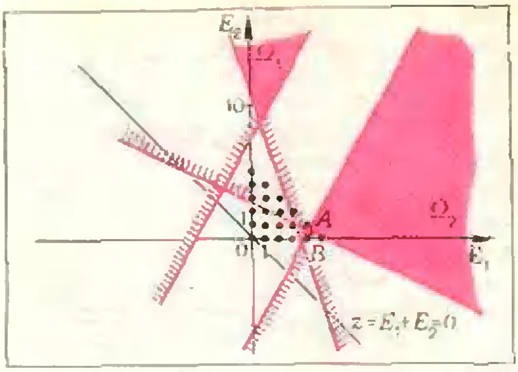


Рис. 5.

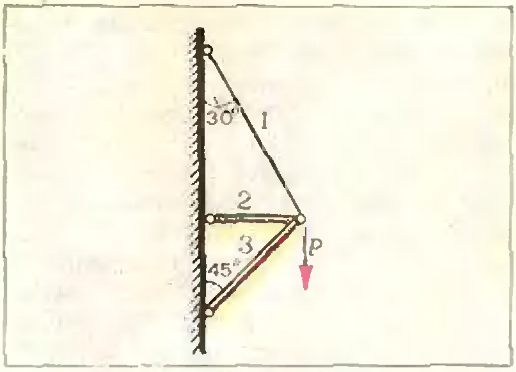


Рис. 6.

Наконец, особенности секретных приборов требуют, чтобы токи и напряжения в них подчинялись ограничениям

$$I_1 \geqslant 2,\ I_2 \geqslant 1,\ |U_3| \geqslant 1{,}5. \qquad (11)$$

Задача отыскания значений I_1, I_2, I_3, E_1, E_2, удовлетворяющих ограничениям (9)—(11) и доставляющих минимум целевой функции (8), есть задача линейного программирования. Выразив из уравнений (9) и (10) токи через ЭДС E_1 и E_2: $I_1 = \frac{1}{5}(3E_1+E_2)$, $I_2 = \frac{1}{5}(E_1+2E_2)$, $I_3 = \frac{1}{5}(-2E_1 + E_2)$, и подставив значения ЭДС в неравенства (11), получаем три ограничения:

$$\begin{cases} 3E_1+E_2 \geqslant 10, \\ E_1+2E_2 \geqslant 5, \\ |-2E_1+E_2| \geqslant 7{,}5. \end{cases}$$

— Не пойдет, — сказал Витя, который тоже был знаком с линейным программированием. — Здесь есть знаки модуля, что ты будешь с ними делать?

— Запишу третье ограничение в виде двух неравенств

$$E_2-2E_1 \geqslant 7{,}5;\ E_2-2E_1 \leqslant -7{,}5,$$

— отпарировал Коля. — Теперь изобразим прямые, отвечающие всем неравенствам-ограничениям (см. рис. 5), и получим две допустимые области Ω_1 и Ω_2 (E_1 и E_2 положительны) и прямую, соответствующую целевой функции. Из рисунка видно, что оптимальное решение достигается в точке A, в которой $E_1=4$, $E_2=0{,}5$.

— Дробить батарейки нельзя, — запротестовал Витя, хозяин батареек. — Решение должно быть целочисленным. Давай округлим решение до целых: поставим вместо E_1 четыре батарейки, а вместо E_2 — одну.

— Не торопись и положи паяльник, — остановил его рассудительный Коля. — Ведь видно, что точка $E_1=4$, $E_2=1$ лежит вне допустимой области, третий прибор работать не будет.

Так наши друзья выяснили коварное свойство задачи линейного программирования: решения не всегда можно округлять до целых значений. Из-за этого пришлось специально разработать целочисленное линейное программирование, которое справляется с этой трудностью. К счастью, ребятам

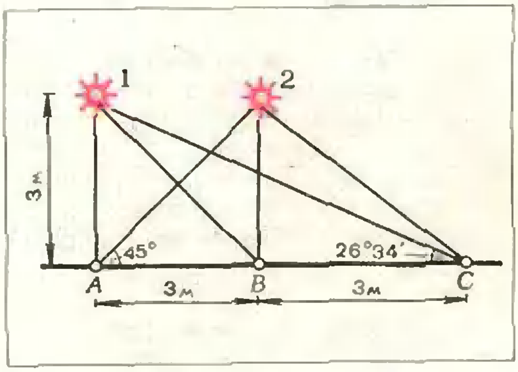


Рис. 7.

удалось получить решение. Все допустимые точки, изображающие разные варианты подключения пяти батареек, показаны на рисунке 5 черными точками. Лишь одна из них — точка B — лежит в допустимой области. Она и дает оптимальное целочисленное решение $E_1=5$, $E_2=0$, хотя значение целевой функции в точке B будет больше, чем в точке A.

Заметим, что задачи такого типа — на определение оптимальных параметров технических устройств (например, количества используемых батареек) — называются *задачами оптимального проектирования*, или *оптимального синтеза*. Они встречаются сейчас в самых различных областях техники.

Упражнения

1. Какой наибольший груз P может выдержать система (см. рис. 6), состоящая из троса *1*, выдерживающего растяжение в 1 m, и двух распорок *2* и *3*, каждая из которых выдерживает сжатие в 2 m, но не выдерживает никакого растяжения?

2. Измерение тока и падения напряжения на участке цепи дали следующие результаты:

Номер измерения	1	2	3
I	4	5	7
U	3	4	5

Каким следует принять сопротивление R, чтобы при рассмотренных значениях I закон Ома ($U = RI$) выполнялся с минимальной абсолютной погрешностью для U?

3. В цепь № 1 включены последовательно три сосуда с электролитами, соответственно содержащими $CuSO_4$, $CuCl_2$ и $NiCl_2$, а в цепь № 2 — три сосуда с электролитами, содержащими $CuCl_2$, $NiSO_4$ и $NiCl_2$. Через них пропускается ток в 100 *а*. Сколько времени должна работать каждая цепь, чтобы с наименьшими затратами электроэнергии получить 2000 *мг* меди и 3000 *мг* никеля, но при этом выделить не более 5000 *мг* хлора?

4. В точках 1 и 2 (рис. 7) нужно поместить два точечных источника света, освещающих горизонтальную площадку под ними. Какими должны быть силы источников I_1 и I_2 (в свечах), чтобы освещенность в точках B и C была не ниже 100 *лк*, в точке A — 200 *лк*, а общая сила источников была минимальной?

Задачи наших читателей

1. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию, такое, что если сложить его с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, то в сумме получится простое число.

В. Н. Кибирев

2. Два кота утащили со склада 1975 сосисок, связанных в 99 цепочек. Принявшись за трапезу, коты по очереди стали перекусывать по одной перемычке между сосисками, и если при этом образовывались отдельные сосиски, то кот, перекусивший перемычку, тут же эти сосиски съедал.

Какой кот съест больше сосисок при правильной «стратегии» — начинающий трапезу или второй? Какова правильная стратегия?

А. А. Григорян

3. Определить, существует ли цифра m (если да, то чему она равна) такая, что при любом натуральном k число

$$\underbrace{99\ldots9}_{k}\,m\,\underbrace{00\ldots0}_{k}\,4$$

— полный квадрат.

М. И. Левин

4. Доказать неравенства:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \\ + \cdots \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$$

(при $n \geq 3$).

С. Т. Берколайко

М. А. Маневич,
М. М. Слуцкин

ЭВМ в конструкторском бюро

В настоящее время в связи с появлением чертежных автоматов, управляемых электронными цифровыми вычислительными машинами, возникла реальная возможность автоматизации многих графических работ, проводимых в конструкторских бюро. К таким работам можно отнести построение проекционных чертежей машиностроительных деталей, разверток поверхностей, аксонометрических (объемных) изображений и т. д. Использование чертежных автоматов и ЭВМ оказывает неоценимую услугу инженерам-конструкторам, разрабатывающим чертежи поверхностей сложных технических форм.

Эпюр Монжа

Поясним сначала, как строится проекционный чертеж.

Выберем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ (рис. 1, *а*). Обозначим координатные плоскости xOy, xOz, yOz соответственно через H, V, W, и будем их называть *плоскостями проекций*. Опустим на них из произвольной точки A внутри первого октанта $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ перпендикуляры Aa, Aa' и Aa'': a — горизонтальная, a' — фронтальная, a'' — профильная проекции точки A. Вращая плоскости H и W вокруг осей Ox и Oz, совместим их с плоскостью V. Тогда в одной плоскости V мы получим изображение пространственной системы координат $Oxyz$ и проекций точки A (рис. 1, *б*; в дальнейшем точки пространства мы будем обозначать прописными буквами, а их проекции — такими же строчными со штрихами). Аналогично строятся проекции фигур — множеств точек.

Анализируя рисунок 1, приходим к выводу, что точка A пространства вполне задана двумя своими проекциями, например, a и a'. Это

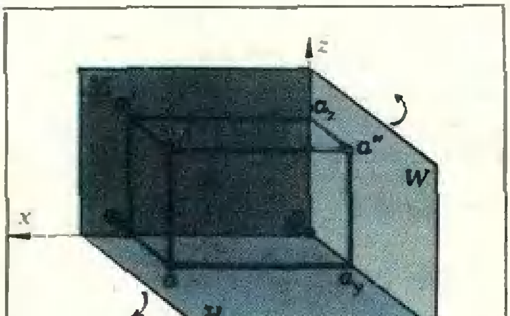


Рис. 1, *а*.

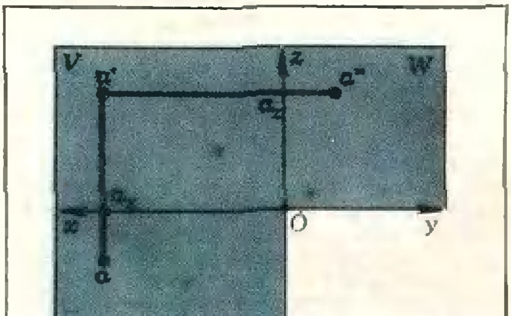


Рис. 1, *б*.

следует из того, что абсцисса ее $x = Oa_x$, ордината $y = a_x a$ и аппликата $z = a_x a'$ определяются из чертежа однозначно. Таким образом, для задания фигуры достаточно иметь две ее проекции.

Чертеж, полученный описанным методом, называют *проекционным чертежом, эпюром Монжа**) или *комплексным чертежом*.

Построение линии пересечения поверхностей

За кульманом стоит конструктор. Он чертит изображение какой-то детали. В некоторых местах поверхность детали имеет резкие переходы, уступы отверстия, выемки. Вот появились на чертеже изображения двух цилиндрических поверхностей, которые образовали как бы ступеньку в детали. Конструктор остановился. «В чем дело?» — спрашиваете вы. «Опять попалась линия пересечения, но не беда! Сейчас построю несколько точек, принадлежащих двум поверхностям, а потом проведу через них плавную кривую по лекалу», — говорит конструктор. И вот на чертеже стали появляться отдельные точки линии пересечения.

С точки зрения графических операций построение линии пересечения поверхностей сводится к нахождению отдельных ее точек. Для этого

*) Гаспар Монж (1746—1818) — французский геометр.

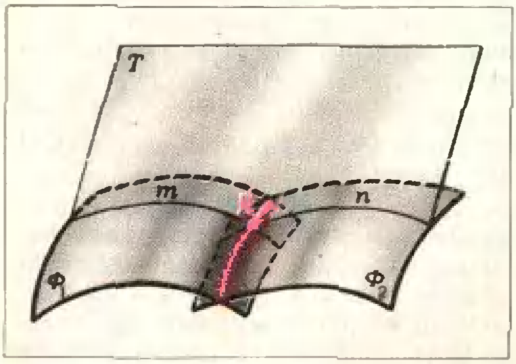


Рис. 2.

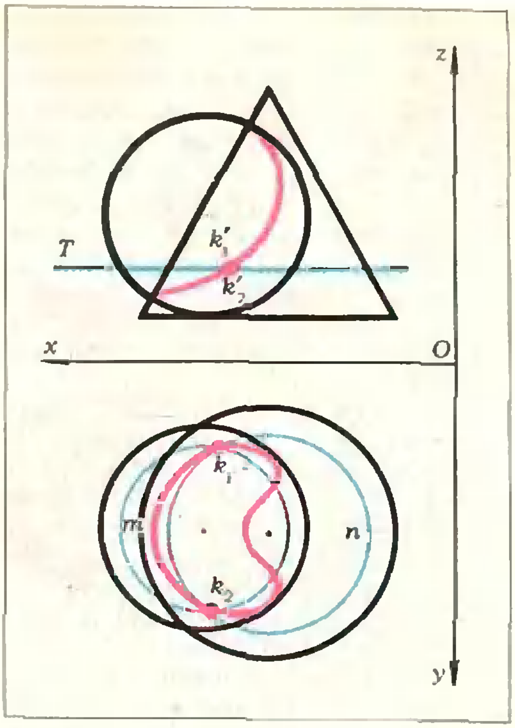


Рис. 3.

данные поверхности $Ф_1$ и $Ф_2$ (рис. 2) *рассекают третьей вспомогательной* поверхностью Т (если пересекаются поверхности вращения, то в качестве вспомогательных поверхностей чаще всего используются сферы и плоскости), а затем определяют *линии пересечения* m и n вспомогательной поверхности Т с двумя данными $Ф_1$ и $Ф_2$ и точку K пересечения построенных линий. Такой прием повторяют много раз, чтобы полученные точки можно было соединить плавной линией.

Пример 1. *Построить линию пересечения сферы и прямого кругового конуса, заданных на проекционном чертеже* (рис. 3).

Выберем произвольную плоскость Т, параллельную горизонтальной плоскости проекций. Эта плоскость рассекает сферу и конус по окружностям m и n соответственно, пересекающимся в точках K_1 и K_2. Построив эти окружности на горизонтальной плоскости проекций, получим точки

k_1 и k_2, принадлежащие горизонтальной проекции линии пересечения (рис. 3). Фронтальные проекции k_1' и k_2' точек K_1 и K_2 будут в данном случае совпадать. Проделав это для ряда вспомогательных плоскостей, параллельных T, мы получим точки, общие для сферы и конуса, а соединив их плавными кривыми на каждой проекции, получим приближенные проекции линии пересечения. Чем больше точек будет построено, тем точнее получится кривая.

Но как бы мы ни старались, точность подобных построений ограничена, полученная линия пересечения далека от идеальной, а потраченное время значительно. Эти недостатки могут быть ликвидированы с помощью ЭВМ и чертежного автомата. Действительно, вычислительная машина производит миллионы действий за считанные секунды, а некоторые современные чертежные автоматы за одну секунду проводят отрезки прямых длиной более 300 *мм*.

При автоматизации процесса построения линии пересечения на чертеже выполняются следующие этапы.

1) *Записываются уравнения поверхностей, заданных на чертеже.*

2) *С помощью ЭВМ определяются координаты x, y, z отдельных точек линии пересечения* (с аналитической точки зрения определение линии пересечения сводится к решению системы уравнений).

3) *Координаты полученных точек подаются на чертежный автомат в виде специальных команд движения пера.*

Каждый этап является самостоятельной задачей, иногда нелегкой. Поясним их более подробно на примере 2, аналогичном примеру 1. Для простоты дальнейших рассуждений выберем систему координат так, чтобы ось Oz совместилась с осью конуса, а ось x проходила через центр сферы.

Пример 2. *Найти линию пересечения сферы радиуса $r=50$, центр которой имеет координаты $x_0=30$, $y_0=0$, $z_0=0$ в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, и прямого кругового конуса, вершина которого лежит на оси Oz в точке $x_1=y_1=0$, $z_1=70$, ось совпадает с осью Oz, а диаметр основания, касающегося сферы, равен* 120 (эти данные взяты из рисунка 4, масштаб на рисунке указан).

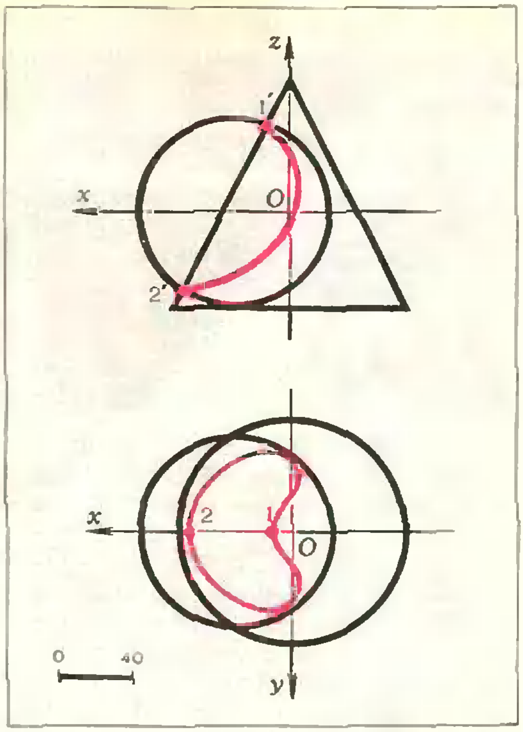


Рис. 4.

Первый этап. Рассмотрим сначала сферу с центром в начале координат и радиусом r (рис. 5). Возьмем на ее поверхности произвольную точку M. Пусть ее координаты x, y, z. Нетрудно доказать (с помощью теоремы Пифагора), что для точки M будет выполняться следующее равенство:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Этому равенству удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на поверхности сферы, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на поверхности сферы. Это равенство и есть *уравнение сферы*.

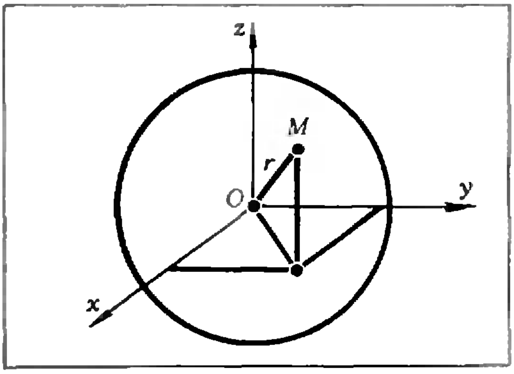


Рис. 5.

Уравнение сферы радиуса 50, центр которой сдвинут по оси Ox на 30 единиц влево (именно такая сфера задана в примере 2), будет

$$(x-30)^2+y^2+z^2=50^2.$$

Можно показать, что

$$x^2+y^2-\frac{1}{4}(z-70)^2=0$$

— уравнение прямого кругового конуса, заданного на рисунке 4. При фиксированом $z=z_0$ оно принимает вид $x^2+y^2=\frac{(z_0-70)^2}{4}$ и задает окружность — сечение конуса плоскостью $z=z_0$.

В данном примере мы быстро написали уравнения поверхностей в силу их простоты. Но, вообще говоря, уравнение поверхности, заданной на чертеже, надо выводить. В этом заключается задача первого этапа.

Итак, мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{1}{4}(z-70)^2=0, \\ (x-30)^2+y^2+z^2=50^2. \end{cases}$$

Второй этап. Вычтем из первого уравнения полученной системы второе. После простых преобразований получим выражение

$$x=\frac{1}{48}z^2-\frac{7}{12}z-\frac{75}{12}, \qquad (*)$$

которое является уравнением фронтальной проекции линии пересечения конуса и сферы. Уравнение (*) задает параболу, часть ее и изображена на рисунке 4.

Рассматривая теперь горизонтальную проекцию, из системы получим: x^2+y^2-

$$-\frac{1}{4}\left(\sqrt{50^2-(x-30)^2-y^2}-70\right)^2=0.$$

Вот какую линию описывает это уравнение, сразу и не скажешь.

Чтобы построить обе кривые на проекциях, будет давать переменной z в уравнении (*) последовательно значения (например, с шагом $\Delta z=0{,}1$) в пределах $-42{,}5\leqslant z\leqslant 46{,}5$ (эти пределы соответствуют крайним точкам 1′ и 2′ на фронтальной проекции, см. рис. 4). Для каждого значения переменной z сначала вычислим по формуле (*) значение переменной x, а затем (из уравнения сферы) найдем значение y по формуле

$$y=\pm\sqrt{50^2-z^2-(x-30)^2}.$$

Указанный процесс вычислений легко осуществляется на ЭВМ. Таким образом, ЭВМ за короткий промежуток времени вычислит и напечатает координаты x, y, z более 200 точек линии пересечения. Теперь эти координаты надо в виде команд подать на чертежный автомат. Начинается третий этап.

Чертежный автомат

Существуют разные виды чертежных автоматов, которые по-разному стыкуются с вычислительными машинами. Современные чертежные автоматы (их часто называют *графопостроителями*) типа Итекан (СССР), Бенсон (Франция; см. рис. 6), Дигиграф (Чехословакия) могут работать и от перфоленты, и от магнитной ленты, на которые выдает информацию вычислительная машина. Чертежный автомат может стыковаться с ЭВМ прямо через специальное переходное электронное устройство.

Большинство существующих чертежных автоматов выполнены с ли-

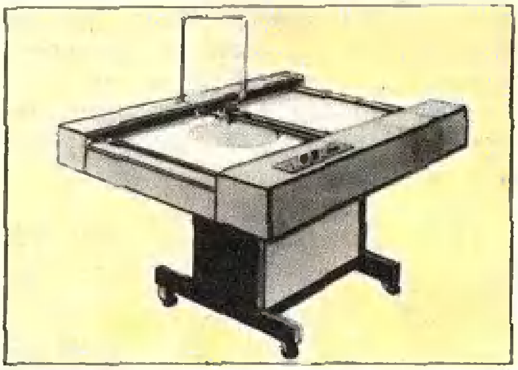


Рис. 6.

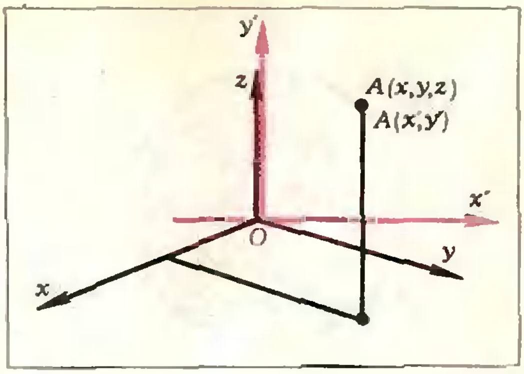


Рис. 7.

нейной и круговой интерполяцией. Это означает, что если задать координаты двух точек A и B, то перо чертежного автомата может провести либо отрезок прямой AB, либо дугу окружности, проходящей через точки A и B (при этом дополнительно задается ее центр). Поскольку ЭВМ вычисляет координаты достаточно большого числа точек, ломаная линия, нарисованная пером автомата (даже в виде отрезков), получается довольно плавной.

Построение аксонометрических изображений

При проектировании различных штампов нередко требуется начертить не только проекционный чертеж, но и аксонометрическое изображение поверхности. Как же научить чертежный автомат вычерчивать аксонометрическое изображение?

На рисунке 7 показано изображение произвольной точки A в аксонометрических осях Ox, Oy, Oz. Эта точка имеет три координаты, и ее изображение построено по определенным геометрическим правилам. Но чертежный автомат не знает ни этих правил, ни что такое аксонометрические координаты x, y и z. Он работает по двум осям, например, x' и y'. Произвольная точка A (x, y, z) имеет какие-то две координаты по этим осям. Очевидно, должна существовать связь между координатами x' и y' и аксонометрическими координатами x, y, z для произвольной точки на плоскости. Эта связь известна и записывается так:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \end{aligned} \qquad (**)$$

где a_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2,3)$ — числа, принимающие определенные значения для данного выбора осей.

Например, для изометрии (в этом случае оси проведены под углами 120° друг к другу) уравнения (**) принимают следующий вид:

$$x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y,$$

$$y' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z.$$

Таким образом, ЭВМ должна пересчитать координаты x, y, z в координаты x' и y' по формулам (**) и подать их в нужной последовательности на чертежный автомат, который и вычерчивает аксонометрическое изображение.

Построение разверток поверхностей

Будем представлять себе поверхность гибкой, но не растяжимой криволинейной пленкой. Существуют поверхности, которые можно постепенно деформировать и совместить с плоскостью так, что при этом не будет ни разрывов, ни складок. Такие поверхности называются *развертывающимися*, а фигура, полученная после совмещения их с плоскостью, называется *разверткой*.

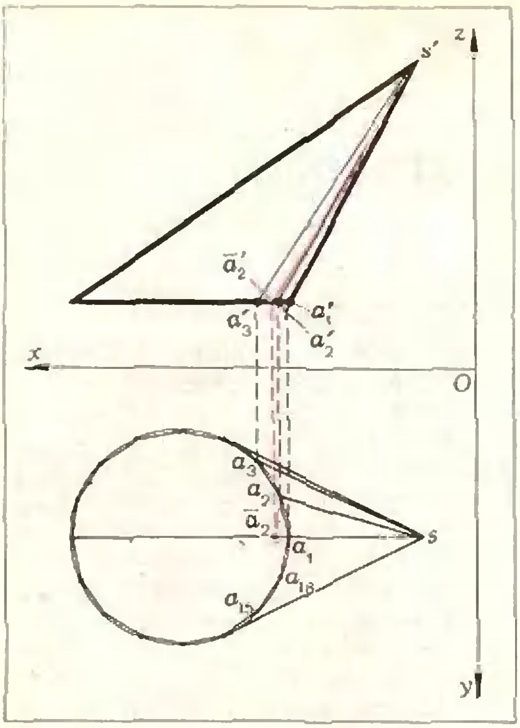


Рис. 8.

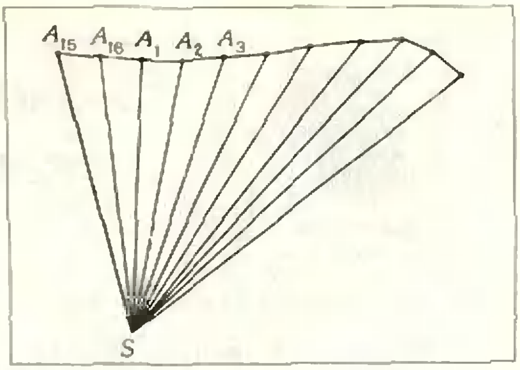


Рис. 9.

Идея графического построения развертки поверхности заключается в следующем: *в поверхность вписывается многогранная поверхность* Ф, *плоские грани которой обычно являются треугольниками. Затем на плоскости строятся все грани в натуральную величину в определенной последовательности.*

Пример 3. *Построить развертку наклонного конуса с круговым основанием, заданного на проекционном чертеже* (рис. 8).

Поступаем следующим образом. Разбиваем основание конуса точками A_1, A_2,... на n равных частей, например, на 16, и соединяем их с вершиной S. Тогда на чертеже мы получим две проекции наклонной пирамиды (с треугольными гранями), вписанной в конус. Теперь надо построить грани пирамиды в натуральную величину. Рассмотрим грань SA_1A_2. Ее горизонтальная проекция будет sa_1a_2, фронтальная — $s'a_1'a_2'$. Нетрудно видеть, что $s'a_1'$ — натуральная величина стороны SA_1, a_1a_2 — натуральная величина стороны A_1A_2. Чтобы найти натуральную величину стороны SA_2, повернем ее вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину S, так, чтобы она стала параллельна фронтальной плоскости проекций V ($s\bar{a}_2$ на горизонтальной проекции). Из полученной точки $\bar{a}_2$ проводим линию связи до пересечения с фронтальной проекцией основания конуса в точке $\bar{a}_2'$ — $s'\bar{a}_2'$ и будет натуральной величиной стороны SA_2. Аналогично находятся длины сторон SA_3, SA_4 и т. д.

Теперь на отдельном листе бумаги построим грань SA_1A_2 (рис. 9), к ней пристроим грань SA_2A_3 и т. д. В результате получим развертку наклонной пирамиды, которая будет приближенной разверткой наклонного конуса.

При увеличении числа граней вписанной пирамиды развертка становится все более точной, но ее построение вручную становится практически невозможным. Положение спасает ЭВМ, которая по заданной программе вычисляет координаты точек A_1, A_2, A_3,... в некоторой системе координат и подает их на чертежный автомат в виде команд движения пера. При большом количестве точек отрезки ломаной будут малы, а линия, нарисованная автоматом, — плавной кривой.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Полное лунное затмение

М. М. Дагаев

Полное лунное затмение — явление довольно редкое. Но вот в ночь с 18 на 19 ноября 1975 г. его можно будет наблюдать почти на всей территории Советского Союза, кроме самых восточных районов, где уже в самом начале затмения начнется день и Луна зайдет за горизонт.

Луна обращается вокруг Земли в направлении с запада на восток и когда она своим левым краем входит в земную тень, начинается лунное затмение. Пока Луна не полностью погрузилась в земную тень, затмение называют частным и фазы Φ лунного затмения определяются долей b лунного диаметра d, покрытой земной тенью: $\Phi = b/d$. По мере погружения Луны в земную тень фаза затмения возрастает и в момент полного погружения становится равной единице — начинается полное лунное затмение.

Во время полного затмения фаза определяется по формуле:

$$\Phi = \frac{R + r - \Delta}{2r},$$

где R — угловой радиус земной тени, r — угловой радиус лунного диска и Δ — угловое расстояние между центрами лунного диска и земной тени. В середине предстоящего полного лунного затмения $R = 40'07'' \approx 40',1$, $r = 15'07'' \approx 15',1$ и $\Delta = 22'53'' \approx 22'9$; поэтому наибольшая фаза полного затмения $\Phi_{max} = 1,07$.

Все фазы лунного затмения будут видны на территории, расположенной к западу от линии, проходящей вблизи Кяхты, Улан-Удэ и Олекминска к Сангару и острову Врангеля, а также севернее географической параллели $\varphi = 71°$, где в эту ночь Луна не заходит за горизонт. Восточнее этой линии полное затмение тоже будет видно, но до его окончании Луна в частном затмении зайдет за горизонт. Восточнее же линии, проходящей от Буреи через Нелькан и Певск к острову Врангеля, можно будет видеть только частные фазы.

Обстоятельства лунного затмения по московскому времени приведены в следующей таблице:

Явление	Момент времени	Фаза затмения
Начало затмения	18 ноября 23 *ч* 38 *мин*	0,00
	19 ноября	
Частные фазы	0 06	0,38
	0 34	0,74
Начало полного затмения	1 02	1,00
Наибольшая полная фаза	1 23	1,07
Конец полного затмения	1 44	1,00
Частные фазы	2 12	0,74
	2 40	0,38
Конец частного затмения	3 08	0,00

Чтобы узнать моменты тех же явлений по местному времени, нужно к табличным моментам прибавить разницу между местным и московским временем. Так, например, в Новосибирске, время которого отличается от московского на 4 часа, частное лунное затмение начнется 19 ноября в 3 *ч* 38 *мин*, а полное — в 5 *ч* 02 *мин*.

Наблюдения полных лунных затмений дают науке обширный материал для изучения структуры земной тени и состояния верхних слоев земной атмосферы. К таким наблюдениям относятся оценки общего (интегрального) блеска Луны в разных фазах затмения, оценки цвета Луны и отдельных деталей ее поверхности, определение моментов покрытия земной тенью деталей лунной поверхности.

Оценки общего блеска Луны могут быть проведены различными способами с помощью простейших приборов.

Один из способов состоит в том, что Луна рассматривается в школьный телескоп (или просто в бинокль со стороны объектива). Подобрав заранее подходящий дымчатый (нейтральный) светофильтр, можно ослабить блеск Луны до блеска звезд нулевой звездной величины (например, Веги, Арктура, Капеллы) и в течение всего затмения через равные промежутки времени (5—10 *мин*) сравнивать блеск Луны, наблюдаемой в телескоп, с блеском звезд различной звездной величины, наблюдаемых невооруженным глазом. Для сравнения нужно выбрать звезды в пределах от 0 до 4 звездной величины и запомнить их взаимное расположение, чтобы во время наблюдений быстро и безошибочно отыскивать их на небе. Когда блеск Луны станет очень слабым, нужно убрать светофильтр и продолжать наблюдения без него.

Если у вас есть чувствительный фотоэкспонометр, то изменение интегрального блеска Луны во время затмения можно изучать по его показаниям. Для этого перед входным отверстием фотоэкспонометра следует жестко установить трубку таких размеров, чтобы она защищала фотоэлемент от рассеянного света неба, а сквозь нее проходил бы только свет от Луны. Так, при длине трубки 60 *см* ее внутренний диаметр должен быть равен 10 *мм*. Внутреннюю поверхность трубки покрывают черной матовой краской. Фотоэкспонометр с трубкой укрепляют на тубусе телескопа так, чтобы трубка была параллельна тубусу. При наблюдениях телескоп направляют на Луну и все время ведут за ней. Показания фотоэкспонометра и характеризуют блеск Луны.

Интересные результаты можно получить, регистрируя видимость звезд невооруженным глазом или в 6-кратный бинокль на протяжении всего затмения (включая и его частные фазы) в определенной области неба. (Чтобы на результатах наблюдений не сильно сказывалось поглощение света в земной атмосфере, необходимо выбрать область неба с неизменной высотой над горизонтом. Обычно это либо область вокруг Полярной звезды, либо область зенита. В ночь затмения вблизи области зенита будут находиться созвездия Персея и Возничего.) Предварительно со звездных атласов нужно скопировать на кальку около 30 звезд последовательно убывающего блеска от 4 до 6 звездной величины (или, при наблюдении в бинокль, до 8,2 звездной величины), пронумеровать их, а во время затмения через каждые 5 *мин* регистрировать номера наиболее слабых звезд, видимых на пределе зрения. Зная звездную величину отмеченных звезд, можно найти степень ослабления лунного света в различных фазах затмения.

Все описанные способы требуют обязательной регистрации времени с точностью до 1 *мин* и двух-трех наблюдений до начала затмения и после его окончания.

Цвет Луны следует оценивать при полном затмении, описывая его словами или по шкале Данжона.

Шкала Данжона: 0 — затмение очень темное, в середине затмения Луна почти или совсем не видна; 1 — затмение темное, серое, детали поверхности Луны совершенно не видны; 2 — затмение темно-красное или рыжеватое, около центра тени наблюдается более темная часть; 3 — затмение красно-кирпичного цвета, тень окружена сероватой или желтоватой каймой; 4 — затмение медно-красное, очень яркое, внешняя зона светлая, голубоватая.

Фотографы-любители могут сфотографировать затмение на цветную пленку, сделав серию снимков (30—35 шт.) с одинаковой экспозицией. По изображениям Луны можно будет судить и о цвете, и об изменении блеска Луны.

Моменты начала и конца покрытия земной тенью крупных деталей лунной поверхности (с точностью до 5—10 *с*), степень их видимости, моменты их полного исчезновения (если это произойдет) и появления, а также цвет земной тени и каймы вокруг нее можно зарегистрировать при наблюдении в телескоп с наибольшим возможным увеличением. Схематическую карту лунной поверхности можно найти в школьном учебнике астрономии.

Если вам удастся получить интересные результаты, присылайте их по адресу: 103009, Москва, К-9, а/я 918, Астрономическая секция ВАГО.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Слова с ограничениями

А. М. Степин,
А. Т. Таги-Заде

Эта статья по теме очень близка к статье Г. А. Гуревича «Бесповторные последовательности», которая была опубликована в «Кванте» № 9 за этот год. Статья посвящена вычислению количества (и доказательству существования) слов любой длины (в том числе, и бесконечной), в данном алфавите с ограничениями, — попутно в ней решается задача М300 из «Задачника «Кванта», № 12, 1974. У Гуревича же вычислялось количество (и доказывалось существование) последовательностей любой длины (и бесконечной), у которых никакая группа цифр не встречается два раза подряд, и решалась задача М310.
Комбинаторная техника, с помощью которой решены задачи М300 и М310 (и их обобщения), находит широкое применение в серьезной математической науке: теории групп, теории алгебр, алгебраической теории чисел.

Наше знакомство со словами и с алфавитами мы начнем с разбора задачи М300, предлагавшейся в «Задачнике «Кванта», см. «Квант» № 12 за 1974 год.

Задача М300

Алфавит состоит из трех букв a, b, c. Назовем словом последовательность любой длины, состоящую из этих букв. При образовании слов некоторые буквосочетания (длины два и более) считаются запрещенными. Известно, что в списке запрещенных буквосочетаний все слова имеют разную длину.

Докажите, что существуют слова любой длины, не содержащие запрещенных буквосочетаний.

Задаче М300 можно придать иную — «развлекательную» — форму:

По городу с прямоугольной планировкой улиц ездит некий автомобилист. Попав на *перекресток*, он либо продолжает ехать прямо, либо поворачивает налево или направо (поворачивать назад нельзя!) — с учетом того, что правилами уличного движения запрещены некоторые комбинации этих поворотов (налево и направо) и проезда прямо. Известно, что все запрещенные комбинации имеют *длину* не меньше двух (например, длина комбинации «налево — направо» равна двум) и что нет различных комбинаций одинаковой длины. Оказывается, что если город достаточно велик и автомобилист стартует в центре, то, несмотря на все запреты, он может проехать в этом городе любое заданное число перекрестков.

Решать задачу М300 все же удобно в терминологии «букв» и «слов».

Запрещенные буквосочетания мы будем называть отмеченными словами и считать слово *хорошим*, если оно не содержит внутри себя ни одного отмеченного слова. Совокупность отмеченных слов мы иногда будем называть *списком запретов* или *ограничений*. Слово, содержащее внутри себя хотя бы одно отмеченное слово, назовем *плохим*.

Обозначим число хороших слов длины l через G_l. Чтобы доказать существование хороших слов любой длины, достаточно показать, что при любом натуральном l число G_l больше нуля. Мы же сейчас покажем, что для любого l хороших слов длины l довольно много: $G_l \geqslant 2^l$.

Упорядочим отмеченные слова по длине и обозначим через l_i длину i-го отмеченного слова ($l_i \geqslant i$).

Лемма 1. *Для чисел G_l справедливо неравенство*

$$G_l \geqslant 3\cdot G_{l-1} - \sum_{l_i,\ 2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i}\ {}^{*)} \qquad (1)$$

(*G_1, очевидно, равно трем; положим G_0 равным единице*).

Доказательство. Заметим, что все хорошие слова длины l содержатся среди слов, получающихся приписыванием справа одной из букв a, b, c к хорошим словам длины $l-1$. При таком приписывании получается $3\cdot G_{l-1}$ слов, среди которых, помимо хороших слов, могут быть и некоторые плохие слова длины l. Оценим их число. Очевидно, что в полученном плохом слове отмеченное слово может находиться только в его конце, то есть оно устроено так: последние l_i букв образуют отмеченное слово, а первые $l-l_i$ букв — хорошее слово ($2\leqslant l_i\leqslant l$). Число плохих слов (длины l) описанного типа, оканчивающихся отмеченным словом длины l_i, не больше числа хороших слов длины $l-l_i$, то есть числа G_{l-l_i} (по условию у нас есть только одно отмеченное слово длины l_i). Всего же в результате приписывания справа одной из букв a, b, c к хорошим словам длины $l-1$ получится не более $\sum\limits_{l_i,\,2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i}$ плохих слов. Значит, среди получившихся $3\cdot G_{l-1}$ слов длины l хороших слов не меньше

$$3\,G_{l-1} - \sum_{l_i,\ l\leqslant 2_i\leqslant l} G_{l-l_i}.$$

Неравенство (1) сыграет главную роль при оценке числа G_l.

Лемма 2. *Для любого натурального l*

$$G_l \geqslant 2G_{l-1}. \qquad (2)$$

Доказательство леммы 2 проведем методом математической индукции.

База индукции: $l=1$; очевидно, что $G_1\geqslant 2\cdot G_0$.

Шаг индукции: Предположим, что неравенство (2) выполнено для всех натуральных $l\leqslant L$, то есть

$$\left\{\begin{array}{l} G_L\geqslant 2\cdot G_{L-1},\\ G_{L-1}\geqslant 2\cdot G_{L-2},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ G_2\geqslant 2\cdot G_1. \end{array}\right. \qquad (2')$$

Докажем, что $G_{L+1}\geqslant 2\cdot G_L$.

Из неравенств (2′) имеем:

$$G_L\geqslant 2\cdot G_{L-1}\geqslant 2^2\cdot G_{L-2}\geqslant\ldots\geqslant 2^k\cdot G_{L-k},$$

то есть

$$G_{L-k}\leqslant G_L/2^k, \qquad (2'')$$

где $k=1,\ 2,\ \ldots,\ L$.

Учитывая оценки (2″), неравенство (1) и сноску к нему, получим, что

$$G_{L+1}\geqslant 3\cdot G_L - \sum_{l_i,\,2\leqslant l_i\leqslant L+1} G_{L+1-l_i}\geqslant$$

$$\geqslant 3\cdot G_L - \sum_{k=1}^{l} G_{L-k}\geqslant {}^{*)}$$

$$\geqslant 3\cdot G_L - G_L\cdot\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{2^l}\geqslant$$

$$\geqslant G_L\cdot(3-1) = 2\cdot G_L,$$

а это и требовалось доказать.

Поскольку $G_{l-1}\geqslant 2\cdot G_{l-2}$, $G_{l-2}\geqslant 2G_{l-3}$, ..., $G_1\geqslant 2\cdot G_0 = 2$, то $G_l\geqslant 2^l$, и мы получаем теорему 1:

Для любого натурального l в условии задачи М300 число хороших слов длины l не меньше, чем 2^l:

$$G_l\geqslant 2^l, \qquad (3)$$

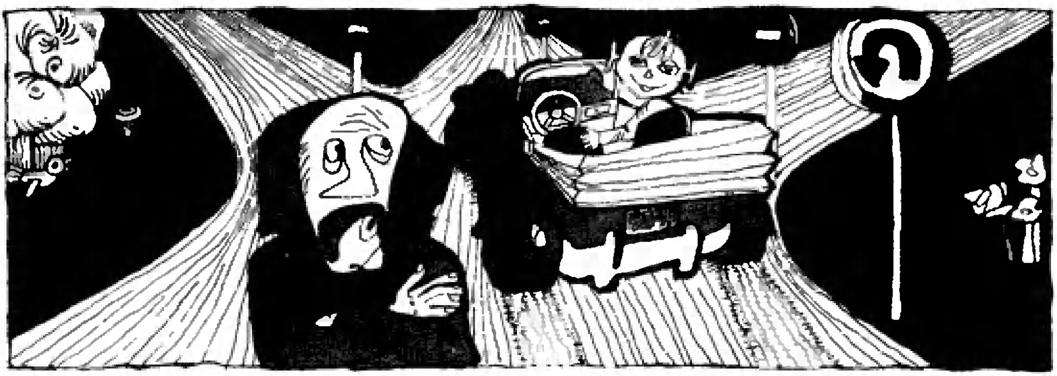
которой и заканчивается решение нашей задачи.

---

*) Сумма $\sum\limits_{l_i,\,2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i}$ — это, вообще говоря, не то же самое, что $\sum\limits_{i=2}^{l} G_{l-i}$: в первой сумме производится суммирование лишь по таким значениям l_i, $2\leqslant l_i\leqslant l$, для которых в списке запретов есть отмеченное слово соответствующей длины l_i (то есть, l_i принимает, быть может, не все из значений 2, 3, ..., l): так, если в списке запретов нет отмеченного слова длины 3, то в сумме $\sum\limits_{l_i,\,2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i}$ член G_{l-3} отсутствует.

*) Здесь уже обычная сумма:

$$\sum_{k=1}^{l} G_{L-k} = G_{L-1}+G_{L-2}+\ldots+G_{L-l}.$$



Бесконечные слова

Теперь мы знаем, что в «словаре» задачи М300 есть хорошие слова любой длины. А есть ли в нем бесконечно длинные хорошие слова?

Сейчас мы докажем, что если список отмеченных слов конечен (есть лишь конечное число запрещенных буквосочетаний), то существует и бесконечно длинное хорошее слово. Однако отметим сразу, что на самом-то деле требование конечности списка отмеченных слов не существенно: утверждение о существовании бесконечно длинного хорошего слова остается верным и в случае бесконечного числа запретов *).

Возьмем самое длинное отмеченное слово (так как по предположению число отмеченных слов конечно, это можно сделать); пусть его длина равна n. Выберем натуральное N так, чтобы N было больше n. Поскольку у нас есть хорошие слова любой длины, возьмем хорошее слово длины $N\cdot(3^N+1)$, обозначим его через A. Разделим слово A на (3^N+1) равных по длине частей B_k длины N: если

$$A = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{N\cdot(3^N+1)},$$

где x_i — это a, либо b, либо c, то $B_k = x_{N\cdot(k-1)+1}, x_{N\cdot(k-1)+2}, \ldots, x_{N\cdot k}$.

Поскольку A — хорошее слово, каждое B_k — тоже хорошее слово длины N. Но в нашем алфавите всего три буквы (a, b, c), поэтому различных хороших слов длины N будет не более, чем 3^N. У нас же получилось (3^N+1) хороших слов B_k; значит, среди них есть одинаковые. Пусть, например, $B_{n_1}=B_{n_2}$ и $n_1<n_2$. Возьмем кусок слова A, состоящий из частей B_k с номерами k от n_1 до n_2-1 включительно. Это будет хорошее слово C длины $m\geqslant N$:

$$C = x_{N\cdot(n_1-1)+1},\ \ldots,\ x_{N\cdot(n_2-1)}.$$

Припишем к слову C справа то же самое слово C. Получим слово D длины $2m$:

$$D = x_{N\cdot(n_1-1)+1},\ \ldots,\ x_{N\cdot(n_2-1)},\ x_{N\cdot(n_1-1)+1},\ \ldots,\ x_{N\cdot(n_2-1)}.$$

Докажем, что D — хорошее слово.

Предположим противное: $D = CC$ — плохое слово; тогда оно содержит какое-то отмеченное слово. Очевидно, что это отмеченное слово

*) Доказательство этого факта вы можете найти в статье Г. А. Гуревича «Бесповторные последовательности» (см. «Квант» № 9). В статье Гуревича фактически доказано, что из свойства *«есть как угодно длинное хорошее слово»* следует свойство *«есть и бесконечно длинное хорошее слово»*, то есть что в действительности существование хороших слов любой длины эквивалентно существованию бесконечно длинного хорошего слова. Мы же докажем, что в наших предположениях существует *периодическое бесконечное слово*, и укажем способ, позволяющий такое слово построить (дадим, как принято говорить, *конструктивное* доказательство).

может находиться только в области «склейки» двух хороших слов C, так что его пересечение с «правым» и «левым» словами C непусто. Но $B_{n_1} = B_{n_2}$ и длина любого отмеченного слова меньше N; значит, это отмеченное слово должно лежать в области «склейки» частей B_{n_2-1} и B_{n_2} хорошего слова A, а этого не может быть, и, следовательно, слово D — хорошее.

Понятно, что бесконечное *периодическое* слово $CC\ldots C\ldots$ с периодом C будет также хорошим, а это, собственно, и даст все, что нужно.

Итак, наш автомобилист может разъезжать по городу бесконечно долго, не нарушая при этом правил уличного движения!

Интересный пример

Вернемся к неравенству (1), с доказательства которого мы начали решение задачи М300; перепишем его так:

$$G_l - 3\cdot G_{l-1} + \sum_{l_i,\,2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i} \geqslant 0. \quad (4)$$

Насколько точно это неравенство? Можно ли в нем знак «$\geqslant$» заменить знаком «$=$»? Вообще говоря, нельзя, и вот почему.

Число $3\cdot G_{l-1}$ — это число слов, получившихся приписыванием справа к хорошим словам длины $l-1$ одной из букв a, b, c; среди таких слов находятся все хорошие слова длины l. Вычитая из числа $3\cdot G_{l-1}$ числа G_{l-l_i}, где l_i — какие-то из значений 2, 3, ..., l (возможно, и все значения), мы тем самым как бы вычеркиваем из построенных слов длины l все те плохие слова, которые получатся, если к хорошему слову длины $l-l_i$ добавить отмеченное слово длины l_i. Но при этом может получиться так, что какое-то плохое слово длины l окажется вычеркнутым несколько раз из числа $3\cdot G_{l-1}$ получившихся слов. Если же среди наших $3\cdot G_{l-1}$ слов длины l нет слов, получающихся из хороших слов длины $l-l_i$ приписыванием справа отмеченного слова длины l_i, то соответствующее число G_{l-l_i} вообще вычитать не надо.

Однако при некоторых дополнительных условиях на список запретов вместо рекуррентных неравенств (4) для чисел G_l (l — любое) будут выполняться аналогичные рекуррентные равенства:

$$G_l - 3\cdot G_{l-1} + \sum_{l_i,\,2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i} = 0. \quad (4')$$

В таких случаях G_l записывается явно в виде функции от l, и для каждого конкретного значения l число G_l можно посчитать.

В частности, из сказанного следует, что для справедливости рекуррентных равенств типа (4') достаточно таких двух условий:

1°. *Среди слов длины l, получающихся приписыванием справа одной из букв a, b, c к хорошим словам длины $l-1$, находятся все слова, получающиеся из хороших слов длины $l-l_i$ приписыванием справа отмеченного слова длины l_i* (оно по предположению есть в списке запретов).

2°. *Каждое полученное таким приписыванием (одной буквы) плохое слово длины l представляется в виде какого-то хорошего слова (меньшей длины) и отмеченного слова единственным образом.*

Условие 2° выполняется, если в списке запретов никакое отмеченное слово не является концом какого-нибудь другого отмеченного слова.

Упражнение 1. Проверьте, что для алфавита из трех букв и списка отмеченных слов ab, acb, $accb$, ..., $a\underbrace{c\ldots c}_{s-2}b$ выполняются условия 1° и 2°, и что для чисел G_l справедливы такие рекуррентные соотношения:

$$G_l - 3\cdot G_{l-1} + G_{l-2} + \ldots + G_{l-s} = 0\ ^{*)}. \quad (5)$$

(s — длина самого длинного отмеченного слова).

Если список запретов упражнения 1 ограничить двумя отмеченными словами ab

---

*) Уравнения вида $G_l + b_1 G_{l-1} + b_2 G_{l-2} + \ldots + b_s G_{l-s} = 0$ ($b_1, \ldots, b_s$ — некоторые постоянные), называются *конечно-разностными* уравнениями; о методах их решения можно прочесть в книге А. О. Гельфонда «Исчисление конечных разностей». М., «Наука», Глава V, § 4, п. 2

и acb, то мы получим уравнение

$$G_l - 3\cdot G_{l-1} + G_{l-2} + G_{l-3} = 0. \qquad (5')$$

Решение уравнения (5') будем искать в виде

$$G_l = \lambda^l. \qquad (5'')$$

Подставляя (5'') в (5'), получим уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

имеющие три различных корня:

$$\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2},\quad \lambda_3 = 1 - \sqrt{2}.$$

Общее решение уравнения (5') записывается так:

$$G_l = C_1 + C_2(1+\sqrt{2})^l + C_3\,(1-\sqrt{2})^l,$$

где C_1, C_2 и C_3 — постоянные, определяющиеся из начальных условий:

$$G_0 = 1,\ G_1 = 3,\ G_2 = 8.$$

Получается такая система для определения C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1, \\ C_1 + C_2(1+\sqrt{2}) + C_3(1-\sqrt{2}) = 3, \\ C_1 + C_2(3+2\sqrt{2}) + C_3(3-2\sqrt{2}) = 8, \end{cases}$$

из которой находим

$$C_1 = -\frac{1}{2},\quad C_2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$C_3 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

значит,

$$G_l = -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(1+\sqrt{2})^l + \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(1-\sqrt{2})^l$$

(в частности, $G_3 = 20$).

Обобщение задачи М300

Пусть теперь алфавит состоит из n букв $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а в списке отмеченных слов (длины не меньше двух) имеется не более m различных слов одинаковой длины.

Сейчас мы докажем, что при некоторых ограничениях на числа n и m и в таком «словаре» будут сколь угодно длинные хорошие слова, причем для каждого натурального l (l — длина слова) — опять-таки довольно много.

Как и при решении задачи М300 (для М300 имеем: $n=3$, $m=1$) вначале нужно доказать

Лемму 3. *При выполнении условий «обобщенной задачи М300» для чисел G_l хороших слов длины l верны такие соотношения:*

$$G_l \geqslant n\cdot G_{l-1} - \sum_{l_i,\,2\leqslant l_i\leqslant l} m_i\cdot G_{l-l_i}, \qquad (6)$$

где через m_i обозначено число отмеченных слов длины l_i (G_1, очевидно, равно n, а G_0 снова полагаем равным 1).

Лемма 3 доказывается в точности теми же рассуждениями, что и лемма 1 (см. с. 33); мы ее доказывать не будем.

Так как по условию каждое m_i не больше m (в дальнейшем мы будем считать $m = \max\{m_i\}$ и называть m *кратностью* системы ограничений), то

$$G_l \geqslant n\cdot G_{l-1} - m\cdot \sum_{l_i,\,2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i}. \qquad (7)$$

Следующий после леммы 3 шаг — доказательство важной леммы 4:

Если

$$m \leqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)^2, \qquad (8)$$

то существует такое $\lambda > 1$, что для любого натурального l

$$G_{l+1} \geqslant \lambda\cdot G_l. \qquad (9)$$

Лемма 4, как и лемма 2 первого параграфа, доказывается методом математической индукции с использованием неравенства (7) и соотношений (2') и (2''), в которых число «2» заменяется буквой «λ» (см. с. 33). Индукционный переход от L к $L+1$ возможен, поскольку квадратное относительно λ неравенство $n - \frac{m}{\lambda - 1} \geqslant \lambda$ с неотрицательным (в силу (8) дискриминантом $\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - m\right]$ имеет решение

$$\lambda_{1,2} = \frac{n+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - m}.$$

Так как $G_1 = n\cdot G_0$ (напомним, что $G_0 = 1$) и

$$n \geqslant \frac{n+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - m},$$

то

$$G_1 \geqslant \left(\frac{n+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - m}\right)\cdot G_0,$$

и существование числа $\lambda > 1$ доказано.

Наконец, аналогично теореме 1, мы получим теорему 2:

Если в условии «обобщенной задачи М300» $m \leqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$, то

$$G_l \geqslant \left(\frac{n+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - m}\right)^l.$$

Блокирующие ограничения

А нужно ли вообще ограничение (8) на кратность системы запретов?

Мы уже видели, что условие $m \leqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ достаточно для существования сколь угодно длинного хорошего слова. Это условие нельзя, вообще говоря, ослабить. В самом деле, при $n = 2$ для алфавита из двух букв a и b получаем условие на кратность $m \leqslant \frac{1}{4}$. Положим $m = 1$ и возьмем в качестве отмеченных такие три слова:

$$ab,\ aaa,\ bbbb.$$

Докажем, что тогда не существует хороших слов длиннее пяти. Систему запретов, для которой нет хороших слов сколь угодно большой длины, будем называть *блокирующей*.

Доказательство (от противного).

Предположим, что существует хорошее слово длины 6. Оно кончается буквой a, или буквой b.

Если это слово кончается буквой b, то поскольку сочетанке ab запрещено, то наше «хорошее» слово состоит только из букв b, чего не может быть, так как сочетание $bbbb$ запрещено.

Пусть это хорошее слово (длины 6) кончается буковой a; рассмотрим его предпоследнюю букву: — если она b, то и все остальные буквы (5 штук) должны быть b — а этого не должно быть. Значит, наше слово оканчивается на aa. Возьмем теперь третью от конца букву нашего слова: если это опять a, то сказывается запрет aaa, если же это b — то остальные буквы (4 штуки) — тоже b, и сказывается запрет $bbbb$.

Приведем еще один пример блокирующей системы запретов — для алфавита из трех букв a, b, c. Для такого алфавита условие (8) нам дает, что m должно быть не больше 1. Положив $m = 2$, т. е. предположив, что можно отмечать по два слова одинаковой длины, возьмем в качестве отмеченных следующие слова:

$$ab,\ ac;\quad bcb,\ bcc;\quad aaaa,\ bbbb;\quad ccccc.$$

Упражнение 2. Докажите, что эти отмеченные слова образуют блокирующее ограничение на хорошие слова.

Какую максимальную длину в этом случае имеет хорошее слово?

Из рассмотренных для $n = 2$ и 3 примеров следует, что существует блокирующая система запретов с кратностью m, такой, что

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 < m \leqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + 1.$$

Но для произвольного натурального n и целого m, где

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 < m \leqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + 1,$$

существование бокирующей системы запретов для алфавита из n букв с кратностью m не доказано. Докажем, что для алфавита из n букв $a_1, \ldots, a_n$ блокирующая система запретов с кратностью $m = \frac{n(n-1)}{2}$ существует. Действительно, возьмем такую систему запретов

$$(1)\ a_1a_2,\ (2)\ a_1a_3, \ldots, (n-1)\ a_1a_n,$$

$$(n)\ a_2a_3, \ldots, \left(\frac{n(n-1)}{2}\right) a_{n-1}a_n.$$

Тогда хороших слов длины больше $2n$ не будет, а единственным хоршим словом длины $2n$ будет слово

$$a_na_na_{n-1}a_{n-1}\ldots a_1a_1.$$

Но, конечно, в каждом конкретном случае все зависит от того, как устроена система запретов. Достаточно, например, для алфавита из двух букв a, b ($n = 2$) и $m = 1$ взять в качестве отмеченных слова

$$aa,\ aba,\ abaa,\ abaab, \ldots,$$

как мы получим, что существует даже бесконечно длинное, периодическое слово $bb \ldots b \ldots$. Более того, можно взять m равным даже четырем (и уж конечно — двум и трем), а в качестве отмеченных, например, слова:

$$aa,\ ab,\ ba,\ aab,\ aba,\ baa,\ aaa,$$

и мы снова получим бесконечное хорошее слово $bb \ldots b \ldots$.

В заключение мы предлагаем читателям, заинтересовавшимся «проблемой хороших слов», порешать задачи.

1. Докажите, что для алфавита a, b не существует системы блокирующих ограничений, состоящей меньше чем из трех слов.

2. Докажите, что в случае $n = 3$ и $m = 2$ не существует бокирующей системы меньше чем из шести отмеченных слов.

3. Докажите, что если для алфавита a, b, c отмечены слова ca, cb, ba, то G_l растет как l^2.

4. Докажите, что $G_{l_1+l_2} \leqslant G_{l_1} \cdot G_{l_2}$.

5. Докажите, что для алфавита из n букв существует блокирующая система ограничений с кратностью m, такой, что

$$\frac{n(n-2)}{2} + 2 \leqslant m < \frac{n(n-2)}{2} + 3.$$

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 декабря 1975 г. по адресу: 113035 Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М346, М347» или «...Ф359». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. В этом учебном году победители нашего конкурса будут приглашены на областные и республиканские олимпиады.

Задачи

М346 — М350; Ф358 — Ф362

М346. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $3:1$ (рис. 1). Докажите, что угол KLD — прямой.

Ю. Г. Богатуров (ученик 10 класса, г. Кутаиси)

М347. Двое играют в такую игру. Первый загадывает два числа от 1 до 25, а второй должен их угадать. Он может назвать любые два числа от 1 до 25 и узнать у первого, сколько из названных им чисел — 0, 1 или 2 — совпадают с загаданными. За какое минимальное число вопросов он сможет наверняка определить загаданные числа?

А. А. Григорян

М348. В таблицу 10×10 записаны числа от 1 до 100 по порядку. Затем в каждой строке и в каждом столбце ровно у половины чисел поставлен знак минус. Докажите, что в получившейся таблице сумма всех чисел равна нулю.

С. М. Агеев

М349. Какому условию должны удовлетворять длины сторон треугольника, чтобы треугольник, составленный из а) высот, б) медиан, в) биссектрис данного треугольника, был подобен данному?

А. П. Савин

М350*. С белого углового поля шахматной доски размерами $n\times m$ (n и m больше 1) начинает двигаться слон. Дойдя до края доски, слон

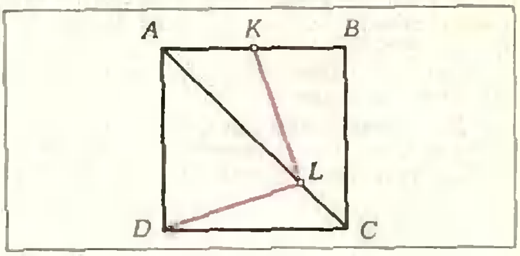


Рис. 1.

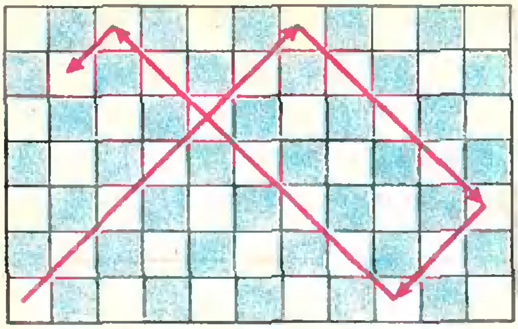


Рис. 2.

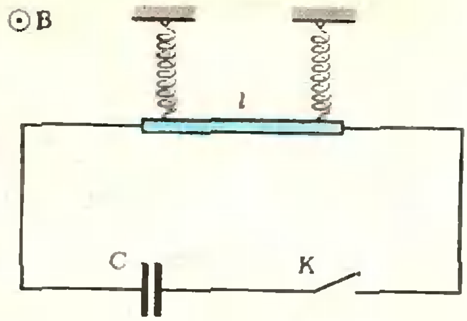


Рис. 4.

поворачивает под прямым углом (рис. 2). Попав в угол, он останавливается.

а) При каких n и m слон обойдет все белые поля доски?

б) Сколько всего полей он обойдет на доске $n\times m$?

Рассмотрите в качестве примеров доски размерами 10×15, 10×25, $15\times\times 25$.

Е. Я. Гик, А. Б. Жорницкий

Ф358. Неоднородный стержень длины l может стоять у вертикальной стены, образуя угол не менее 45° с полом. Коэффициент трения стержня о пол и о стену равен $\sqrt{3}$. На какой высоте находится центр тяжести стержня?

Ф359. В цилиндрическом сосуде под поршнем находится насыщенный водяной пар при температуре $t = 20$°C. При изотермическом медленном вдвигании поршня в цилиндр было отведено количество тепла $Q = 20$ *ккал*. Какая работа была совершена при этом внешними силами, действующими на поршень?

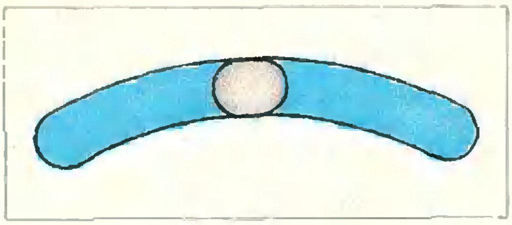


Рис. 3.

Ф360. Для измерения ускорения используется изогнутая трубка, заполненная водой, в которой имеется пузырек воздуха (рис. 3). Трубка изогнута по дуге окружности. Как связано положение пузырька с ускорением трубки?

Ф361. Прямолинейный проводник длины l и массы m подвешен на двух пружинах жесткости k в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией B (рис. 4). При замыкании ключа K конденсатор емкости C, заряженный до разности потенциалов U, замыкается на проводник и разряжается. При этом возникают колебания проводника. Определить амплитуду этих колебаний, если время разряда конденсатора много меньше периода колебаний проводника.

Ф362. Слоистый конденсатор состоит из трех металлических параллельных пластин площадью S. Пространства между пластинами заполнены диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 и удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2. Толщины слоев диэлектриков d_1 и d_2. Конденсатор находится под постоянным напряжением U. Определить заряд средней пластины при установившемся токе в цепи.

Решения задач

М308-М315; Ф318-Ф321

М308. *Если при любом x* $a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx \geqslant -1$, *то для чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *выполнено неравенство* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant n$.

Докажите это утверждение: а) для $n = 2$; б) для $n = 3$; в) для любого натурального n.

а) Достаточно положить $x = \frac{2\pi}{3}$.

б) Положите последовательно $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$ и сложите получившиеся неравенства.

в) Докажем предварительно следующую формулу: если $\varphi = \frac{2k\pi}{n+1}$, где k и n — целые числа, причем k не делится на $n+1$, то

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi = -1. \quad (*)$$

Пусть даны точки O и A_0. Повернув точку A_0 на угол φ относительно точки O, получим точку A_1. Из точки A_1 тем же поворотом получим точку A_2, из точки A_2 — точку A_3 и так далее. Так как $(n+1)\varphi = 2k\pi$, то точка A_{n+1} совпадает с точкой A_0. Сумма векторов $\vec{OA}_0, \vec{OA}_1, \vec{OA}_2, \ldots, \vec{OA}_n$ равна нуль-вектору. Действительно, при повороте каждого из этих векторов на угол φ относительно точки O на тот же угол должен повернуться и вектор, равный их сумме. Так как, с другой стороны, вектор, равный сумме векторов $\vec{OA}_0$, $\vec{OA}_1, \ldots, \vec{OA}_n$, не изменится при этом повороте (ибо точка A_0 перейдет в точку A_1, точка A_1 — в точку $A_2, \ldots$, точка A_n — в точку A_0), то он равен нуль-вектору.

Предположим теперь, что точка O является началом координат, а вектор $\vec{OA}_0$ имеет длину 1 и направлен по оси абсцисс. Так как проекция суммы векторов на любую ось равна сумме их проекций на эту ось, то сумма проекций векторов $\vec{OA}_1, \vec{OA}_2, \ldots, \vec{OA}_n$ на ось абсцисс равна -1 (проекция вектора $\vec{OA}_0$ на ось абсцисс равна 1). Но эти проекции равны, очевидно, $\cos\varphi, \cos 2\varphi, \ldots, \cos n\varphi$, откуда и следует формула $(*)$.

Формулу $(*)$ можно доказать и иначе, умножив обе ее части на $2\sin\frac{\varphi}{2}$ и воспользовавшись формулой

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\cos k\varphi = -\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\varphi + \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi,$$

— сделайте это самостоятельно.

Перейдем к решению задачи в).

Взяв произвольное число x_1, положим $x_2 = 2x_1$, $x_3 = 3x_1, \ldots, x_n = nx_1$. При $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3, \ldots$, $x = x_n$ получим неравенства:

$$a_1\cos x_1 + a_2\cos 2x_1 + a_3\cos 3x_1 + \ldots + a_n\cos nx_1 \geqslant -1,$$

$$a_1 \cos x_2 + a_2 \cos 2x_2 + a_3 \cos 3x_2 + \ .\ .\ + a_n \cos nx_2 \geqslant -1,$$
$$a_1 \cos x_3 + a_2 \cos 2x_3 + a_3 \cos 3x_3 + \ .\ .\ + a_n \cos nx_3 \geqslant -1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_1 \cos x_n + a_2 \cos 2x_n + a_3 \cos 3x_n + \ .\ .\ + a_n \cos nx_n \geqslant -1.$$

Учитывая, что $kx_l = klx_1 = lkx_1 = lx_k$, эти неравенства можно переписать так:

$$a_1 \cos x_1 + a_2 \cos x_2 + a_3 \cos x_3 + \ .\ .\ .\ + a_n \cos x_n \geqslant -1,$$
$$a_1 \cos 2x_1 + a_2 \cos 2x_2 + a_3 \cos 2x_3 + \ldots + a_n \cos 2x_n \geqslant -1,$$
$$a_1 \cos 3x_1 + a_2 \cos 3x_2 + a_3 \cos 3x_3 + \ldots + a_n \cos 3x_n \geqslant -1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_1 \cos nx_1 + a_2 \cos nx_2 + a_3 \cos nx_3 + \ldots + a_n \cos nx_n \geqslant -1.$$

Сложив эти неравенства и положив $x_1 = \frac{2\pi}{n+1}$ (тогда $x_2 = \frac{4\pi}{n+1}$, $x_3 = \frac{6\pi}{n+1}, \ldots, x_n = \frac{2n\pi}{n+1}$), придем на основании формулы (*) к неравенству

$$-a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n \geqslant -n,$$

откуда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leqslant n \text{ *)}.$$

Ю. И. Ионин

♦

M309. а) *При каких n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$?*

б) *При каких n число*
$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\underbrace{0\ldots0}_{n}1$$
делится на 37?

а) Рассмотрим три случая, соответствующие различным остаткам от деления n на 3.

1°. Пусть $n=3k$; тогда

$$x^{6k} + x^{3k} + 1 = (x^{6k} - 1) + (x^{3k} - 1) + 3 =$$
$$= (x^3 - 1)(x^{6k-3} + x^{6k-6} + \ldots + 1) +$$
$$+ (x^3 - 1)(x^{3k-3} + x^{3k-6} + \ldots + 1) + 3 =$$
$$= (x^2 + x + 1) \cdot Q(x) + 3,$$

где $Q(x) = (x-1)[(x^{6k-3} + x^{6k-6} + \ldots + 1) + (x^{3k-3} + \ldots + 1)]$.

Следовательно, если $n=3k$, то многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ при делении на $x^2 + x + 1$ дает в остатке 3.

2°. Пусть $n = 3k + 1$. Имеем

$$x^{6k+2} + x^{3k+1} + 1 = (x^{6k+2} - x^2) + (x^{3k+1} - x) +$$
$$+ (x^2 + x + 1) = x^2(x^{6k} - 1) + x(x^{3k} - 1) + (x^2 + x + 1)$$

В 1° мы показали, что многочлены $(x^{6k} - 1)$ и $(x^{3k} - 1)$ делятся на $(x^3 - 1)$, следовательно, и на $(x^2 + x + 1)$; поэтому при $n = 3k + 1$ многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$.

3°. Пусть $n = 3k + 2$. Тогда

$$x^{6k+4} + x^{3k+2} + 1 = x^4(x^{6k} - 1) + x^2(x^{3k} - 1) + x^4 + x^2 +$$
$$+ 1 = x^4(x^{6k} - 1) + x^2(x^{3k} - 1) + x(x^3 - 1) + (x^2 + x +$$
$$+ 1) = (x^2 + x + 1)[(x-1)R(x) + 1],$$

где $R(x) = x^4(x^{6k-3} + \ldots + 1) + x^2(x^{3k-3} + \ldots + 1) + x$, и многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ снова делится на $x^2 + x + 1$.

---

*) Аналогично решена эта задача в книге Полна и Сеге «Задачи и теоремы из анализа».

Итак, ответ в задаче а) таков:

многочлен $x^{2n}+x^n+1$ делится на x^2+x+1, если n не кратно трем.

б) При решении этой задачи можно воспользоваться результатом пункта а), поскольку все многочлены, получающиеся при делении, — частные и остатки — имеют целые коэффициенты. Действительно, при $x=10$ мы получим соответственно

$$x^2+x+1=111,\ x^{2(n+1)}+x^{(n+1)}+1=1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

С другой стороны, $10^{2m}+10^m+1$ делится на 3 при всех m, и вопрос о том, делится ли $10^{2m}+10^m+1$ на 37, эквивалентен вопросу о делимости $10^{2m}+10^m+1$ на $37\cdot3=111$. Ответ в этой задаче такой: число $1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\underbrace{0\ldots0}_{n}1$ делится на 37, если n кратно 3 или если n при делении на 3 дает остаток 1.

Ф. Г. Шлейфер

♦

M311. *) *Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трех получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 667.*

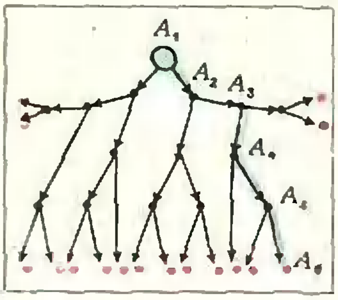


Рис. 1.

Пусть некоторая бактерия, у которой N потомков среди 1000 бактерий, разделилась на две, у которых соответственно N' и N'' потомков. Тогда $N=N'+N''$, и поэтому одно из чисел N' и N'' не меньше $N/2$.

Рассмотрим последовательность бактерий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$, где A_1 — самая первая бактерия, A_{k+1} (для $k=1, 2, \ldots, m-1$) — та из двух бактерий, возникших при делении A_k, у которой не меньше потомков, чем у ее сестры, и A_m — одна из 1000 бактерий, которые получились в конце. Пусть A_k имеет N_k потомков. Тогда последовательность

$$N_1=1000,\ N_2, N_3, \ldots, N_{m-1}, N_m=1$$

убывающая, но каждый член в ней не меньше половины предыдущего: $N_k>N_{k+1}\geqslant N_k/2$. (На рисунке 1, изображающем процесс деления бактерий в виде «генеалогического дерева», показана цепочка бактерий $A_1, A_2, \ldots, A_6$; здесь $N_1=16$, $N_2=9$, $N_3=5$, $N_4=3$, $N_5=2$, $N_6=1$.) Если выбрать j так, что $N_{j-1}\geqslant 668$, а $N_j<668$, то получим $334\leqslant N_j\leqslant 667$, то есть бактерия A_j будет удовлетворять заданному условию.

Точно так же можно доказать, что если в конце получилось M бактерий, то для любого натурального c найдется бактерия, число потомков которой N удовлетворяет условиям $c\leqslant N<2c$.

Н. Б. Васильев

♦

M312. *В параллелограмм P_1 вписан параллелограмм P_2, в который в свою очередь вписан параллелограмм P_3, причем стороны P_3 параллельны сторонам P_1. Докажите, что хотя бы одна сторона параллелограмма P_3 по длине не меньше половины параллельной ей стороны P_1.*

Заметим прежде всего, что если параллелограмм $ABCD$ *вписан в параллелограмм* $KLMN$ (см. рис. 2), то они имеют общий центр симметрии O. Это следует из того, что при симметрии относительно O параллелограмм $KLMN$ переходит в себя, а сторона AB параллелограмма $ABCD$ переходит

*) Решение задачи M310 содержится в статье Г. А. Гуревича «Бесповторные последовательности» («Квант», 1975, № 9).

в равный по длине и параллельный отрезок с концами на соответствующих сторонах параллелограмма $KLMN$, то есть в отрезок CD.

Поэтому у параллелограммов P_1, P_2 и P_3 — общий центр симметрии. Из этого получаем, что четыре закрашенных параллелограмма, расположенных в углах K, L, M и N, конгруэнтны; обозначим длины их сторон соответственно через x и y.

Пусть a и b — длины сторон параллелограмма P_3. Тогда длины сторон параллелограмма P_1 равны $(a+2x)$ и $(b+2y)$. Нам нужно доказать, что либо $a \geqslant \frac{a+2x}{2}$, либо $b \geqslant \frac{b+2y}{2}$, то есть, что либо $a \geqslant 2x$, либо $b \geqslant 2y$. Это будет так, если мы докажем такое неравенство: $ab \geqslant 4xy$.

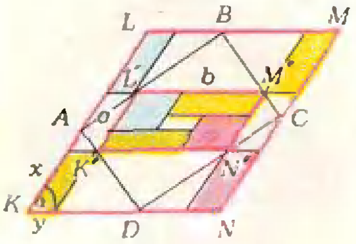


Рис. 2.

Рассмотрим параллелограмм, три вершины которого — точки A, L и B. Поскольку диагональ AB делит его угловые параллелограммы — левый нижний и правый верхний — на конгруэнтные треугольники, то площади параллелограммов, закрашенных на рисунке 2 синим, равны. Точно так же равны площади параллелограммов, закрашенных желтым, красным и зеленым: все закрашенные параллелограммы равновелики. Очевидно (см. рисунок), что суммарная площадь закрашенных параллелограммов не превышает площади параллелограмма P_3. Но площадь одного закрашенного параллелограмма равна $xy \cdot \sin\alpha$, а площадь параллелограмма P_3 равна $ab \cdot \sin\alpha$; значит,

$$ab \geqslant 4xy,$$

что и требовалось.

И. Н. Клумова

♦

М313. *Дан угол с вершиной O. Рассмотрим множество четвертых вершин M параллелограммов $ONML$, вершины N и L которых лежат на сторонах данного угла, а площадь равна постоянной величине. (Это множество называется гиперболой.) Докажите, что на биссектрисе этого угла и на ее продолжении найдутся такие точки F_1 и F_2 (где $|F_1O| = |F_2O|$), для которых разность расстояний*

$$||F_1M| - |F_2M||$$

не зависит от точки M.

Пусть 2α — заданный угол, A — вершина гиперболы (точка ее пересечения с биссектрисой), A' — симметричная ей точка относительно O, KMQ — перпендикуляр к этой биссектрисе, проходящий через M (K лежит на биссектрисе, Q — на стороне угла, см. рис. 3).

Введем обозначения: $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$, $a = |OA| = |OA'|$, $x = |ON|$, $y = |OL|$, $r = |OM|$, $\varphi = \widehat{AOM}$, наконец, c — искомое расстояние точек F_1 и F_2 от вершины O угла (центра гиперболы). (Для знающих аналитическую геометрию: x и y — косоугольные координаты точки M, а r и φ — ее полярные координаты.)

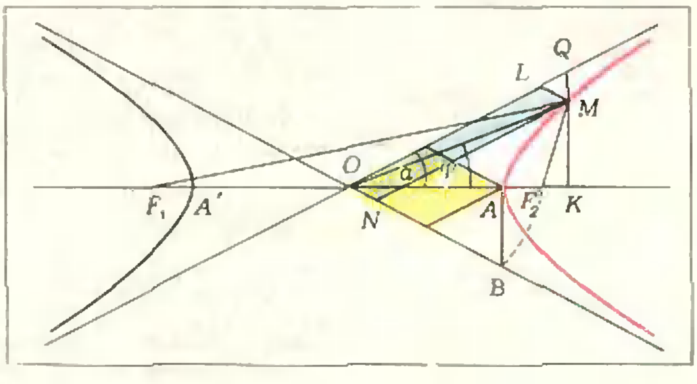


Рис. 3.

По условию задачи, синий и желтый параллелограммы должны иметь одинаковую площадь:

$$k = xy \sin 2\alpha = \left(\frac{a}{2\cos\alpha}\right)^2 \sin 2\alpha,$$

откуда

$$xy = \frac{a^2}{4\cos^2\alpha}. \qquad (1)$$

Нужно найти такое положение F_1 и F_2 (то есть такое значение c), чтобы разность $r_2 - r_1$ была одной и той же для всех точек M гиперболы. В частности, для ее вершины A эта разность $||F_1A| - |F_2A||$, вследствие симметрии ($|F_2A| = |F_1A'|$), равна $|A'A| = 2a$ (оси гиперболы). Значит, эта разность должна быть равна

$$r_2 - r_1 = 2a. \qquad (2)$$

Найдем выражения r_1 и r_2 через постоянные a, c и α (в эти выражения войдут, конечно, и какие-то переменные величины). Применяя теорему косинусов для треугольников F_1MO, F_2MO и OMN, имеем:

$$r_{1,2}^2 = c^2 + r^2 \pm 2cr\cos\varphi \qquad (3)$$

(верхний знак для r_1, нижний для r_2) и

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos 2\alpha. \qquad (4)$$

Угол φ можно из формулы (3) сразу исключить: из чертежа видно, что

$$r\cos\varphi = |OK| = |OQ|\cos\alpha = (|OL| + |LQ|)\cos\alpha = (|OL| + |LM|)\cos\alpha = (x+y)\cos\alpha;$$

следовательно,

$$r_{1,2}^2 = c^2 + r^2 \pm 2c(x+y)\cos\alpha. \qquad (3')$$

Подставляя (4) в (3') и используя условие (1) и тождества $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, получаем:

$$r_{1,2}^2 = c^2 + (x+y)^2 - 2xy + 2xy\cos 2\alpha \pm 2c(x+y)\cos\alpha =$$

$$= c^2 + (x+y)^2 - \frac{a^2}{2\cos^2\alpha} +$$

$$+ \frac{a^2}{2\cos^2\alpha}(2\cos^2\alpha - 1) \pm 2c(x+y)\cos\alpha =$$

$$= \left[c^2 - \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\right] + [(x+y)^2 + a^2 \pm 2c(x+y)\cos\alpha]. \qquad (5)$$

До сих пор c было произвольным. Подберем его теперь так, чтобы формула (5) приобрела возможно более простой вид. Положим $c = \frac{a}{\cos\alpha}$ (тогда $|OF_2| = |OB|$, см. рисунок). Тогда формула (5) принимает следующий вид:

$$r_{1,2}^2 = (x+y)^2 + a^2 \pm 2(x+y)a = [(x+y) \pm a]^2.$$

Из рисунка ясно, что $x + y > a$ ($|OQ| > |OA|$); следовательно,

$$r_1 = (x+y) + a, \quad r_2 = (x+y) - a.$$

Отсюда получается $r_1 - r_2 = 2a$. Интересно заметить, что $r_1 + r_2 = 2(x+y)$, т. е. *сумма расстояний любой точки гиперболы до ее фокусов равна периметру параллелограмма, лежащего в определении гиперболы.*

И. Н. Бронштейн

М315. *) *На каждом ребре выпуклого многогранника поставлена стрелка так, что в каждую вершину многогранника входит и из каждой выходит хотя бы одна стрелка. Докажите, что существуют по крайней мере две грани многогранника, каждую из которых можно обойти по периметру, двигаясь в соответствии с направлениями стрелок на ее сторонах.*

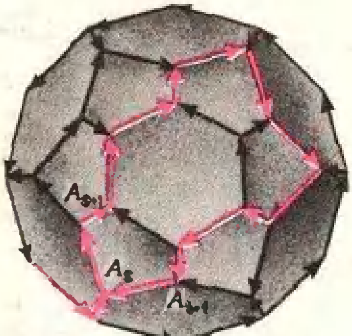


Рис. 4.

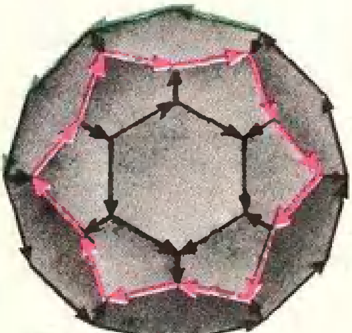


Рис. 5.

Назовем последовательность

$$A_1A_2,\ A_2A_3,\ \ldots,\ A_{l-1}A_l$$

ребер многогранника *путем*

$$P = A_1A_2 \ldots A_l,$$

если на всех этих ребрах стрелки направлены в одну сторону: либо от A_1 к A_2, от A_2 к A_3, ..., от A_{l-1} к A_l, либо же от A_l к A_{l-1}, от A_{l-1} к A_{l-2}, ..., от A_2 к A_1.

Так как по условию в каждую вершину многогранника входит и из каждой выходит хотя бы одна стрелка, то любой путь можно удлинить в обе стороны, присоединяя к его концам новые ребра.

Начав с произвольного ребра A_1A_2 многогранника (оно, очевидно, является путем), будем последовательно строить пути $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_3A_4$ и так далее, до тех пор, пока не получится такой путь, в котором одна из вершин встречается дважды: $A_s = A_l$, $1 \leqslant s < l$. Таким образом мы получим *замкнутый* путь $P_0 = A_sA_{s+1}\ldots A_l$ (у него все вершины, кроме крайних, $A_s = A_l$, различны, рис. 4). Так как многогранник выпуклый, то путь P_0 делит его поверхность на две области D и D'. Покажем, что в каждой области имеется по крайней мере одна грань, которую можно обойти по периметру, двигаясь в соответствии с направлениями стрелок на ее сторонах.

Возьмем область D; пусть она состоит из $k_0 \geqslant 1$ граней многогранника. Если $k_0 = 1$, то эта область (ограниченная путем P_0) является нужной гранью. Если же $k_0 > 1$, то в области D есть ребро A_lB, не входящее в путь P_0 (причем A_l входит в P_0). Начав с этого ребра, будем строить путь через вершину B внутри области D до тех пор, пока не получится путь, у которого одна из вершин встречается дважды (если мы выйдем на границу области D, то дальше по пути P_0 возвратимся к A_l). Так мы получим новый замкнутый путь P_1 (рис. 5). Путь P_1 лежит внутри области D и не совпадает с P_0; значит, область, ограниченная путем P_1, состоит из $k_1 < k_0$ граней многогранника. Если $k_1 = 1$, то P_1 ограничивает искомую грань; если же $k_1 > 1$, то точно так же построим замкнутый путь P_2, ограничивающий область, которая состоит из $k_2 < k_1$ граней, и так далее. Так как все числа k_i — натуральные и $k_{i+1} < k_i$, то за конечное число шагов мы получим замкнутый путь P_0, ограничивающий ровно одну — искомую — грань.

Вторую искомую грань можно найти точно так же, рассматривая D' — вторую из областей, на которые путь P_0 разделил наш многогранник.

А. М. Зубков

Ф318. *При каком C_1 емкость системы конденсаторов, показанной на рисунке 6, равна: а) C; б) kC $(k \neq 1)$; в) C_1?*

Пусть рассматриваемая система конденсаторов присоединена к источнику с напряжением U. Из соображений симметрии следует, что заряды конденсаторов емкости kC будут одинаковыми. Обозначим их через Q. Аналогично равны заряды q конденсаторов емкости C. Заряд конденсатора C_1 обозначим через q_1. Расставим произвольно знаки зарядов отдельных обкладок конденсаторов (см. рис. 6).

Заряд $Q_x = Q + q$ системы конденсаторов связан с напряжением $U = U_2 + U_3 = \dfrac{q}{C} + \dfrac{Q}{kC}$, приложенным к системе, соотношением $Q_x = C_xU$, где C_x —емкость системы, то есть

$$Q + q = C_x\left(\frac{q}{C} + \frac{Q}{kC}\right). \qquad (1)$$

---

*) Решение задачи М314 будет опубликовано в следующем номере журнала.

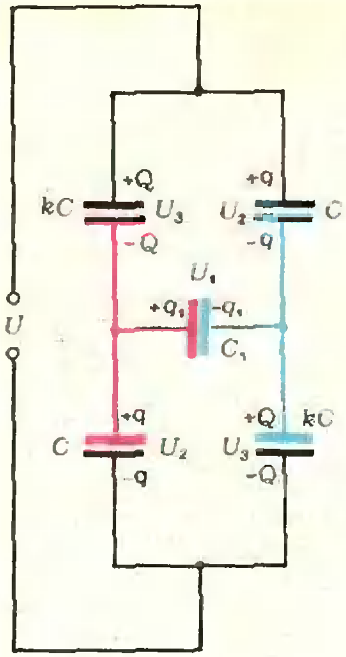


Рис. 6.

Работа сил электростатического поля по перенесению любого, а значит и единичного, заряда по замкнутой траектории всегда равна нулю. Обойдя, например, верхний контур (см. рис. 6) против часовой стрелки, получим

$$U_1 - U_2 + U_3 = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q}{C} + \frac{Q}{kC} = 0. \qquad (2)$$

Воспользуемся также законом сохранения заряда. Часть системы, показанная на рисунке 6 красным цветом (можно рассмотреть и участок, показанный синим цветом), до присоединения системы к источнику была нейтральной. Так как эта часть изолирована, ее суммарный заряд останется равным нулю:

$$q + q_1 - Q = 0. \qquad (3)$$

Из уравнений (1)—(3) следует, что

$$C_x = \frac{2kC + (1+k)C_1}{2C_1 + (1+k)C}C.$$

Отсюда легко получить, что

а) $C_x = C$ при $C_1 = -C$, что невозможно;

б) $C_x = kC$ ($k \neq 1$) при $C_1 = -kC$, что также невозможно;

в) $C_x = C_1$ при $C_1 = \sqrt{k}C$.

♦

Ф319. *На расстоянии $2F$ от собирающей линзы $Л_1$ с фокусным расстоянием F находится светящийся предмет. Освещенность четкого изображения предмета на экране при этом равна E_0. Между экраном и линзой $Л_1$ поместили рассеивающую линзу $Л_2$ с фокусным расстоянием $-2F$. Для получения четкого изображения предмета пришлось экран передвинуть на расстояние, равное F. Определить освещенность изображения предмета во втором случае.*

Из условия задачи следует, что изображение предмета, создаваемое линзой $Л_1$, находится от нее на расстоянии $2F$ (это легко проверить по формуле линзы). Пусть рассеивающую линзу $Л_2$ поместили на расстоянии x от линзы $Л_1$ (рис. 7). Очевидно, что для получения четкого изображения экран пришлось отодвинуть дальше от линз. Прежнее изображение, созданное линзой $Л_1$, можно рассматривать как мнимый предмет для линзы $Л_2$. Тогда расстояние от «предмета» до линзы $Л_2$ будет $2F - x$, а расстояние от изображения до этой линзы $3F - x$. Из формулы линзы

$$-\frac{1}{2F-x} + \frac{1}{3F-x} = -\frac{1}{2F}$$

можно найти x. Вычисления дают $x = F$.

Теперь найдем линейное увеличение линзы $Л_2$:

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{3F-x}{2F-x} = 2.$$

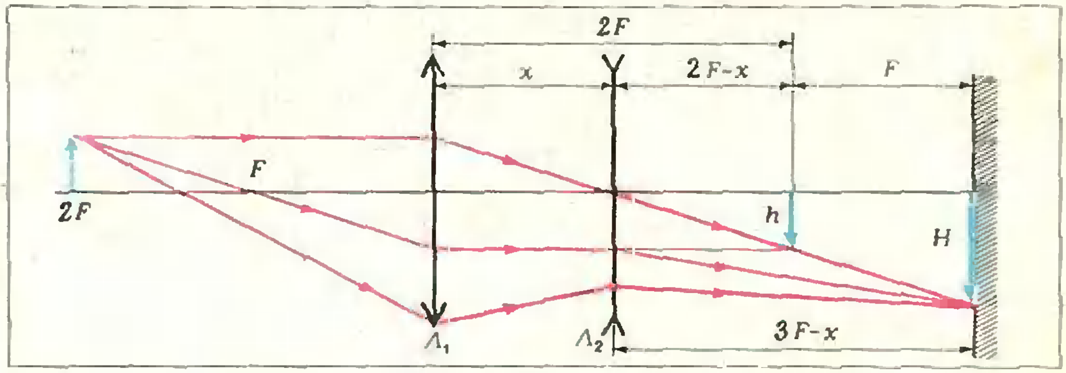


Рис. 7.

Следовательно, если через линзу $Л_2$ проходит весь световой поток, который падал на линзу $Л_1$, то во втором случае этот поток распределяется по площади в $Г^2 = 4$ раза большей. Поэтому освещенность изображения будет в четыре раза меньше, то есть $E = E_0/4$.

Ф320. *В откачанном сосуде емкостью $V = 1$ л находится 1 г гидрида урана UH_3. При нагреве до температуры $t_1 = 400°C$ гидрид полностью разлагается на уран (атомный вес $A = 238$) и водород. Найти давление водорода в сосуде при этой температуре.*

◆

Реакция разложения гидрида урана идет по уравнению

$$2UH_3 = 2U + 3H_2,$$

то есть из 482 *г* (из двух молей) гидрида урана получается 476 *г* (два моля) урана и 6 *г* (три моля) водорода. Соответственно, из 1 *г* гидрида урана получится $m = 6/482$ *г* водорода. Считая водород идеальным газом, найдем его давление при данных условиях ($T = 673°K$, $V = 10^{-3}$ $м^3$). Из уравнения состояния идеального газа

$$p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} \approx 35 \cdot 10^3 \ н/м^2.$$

Ф321. *На горизонтальную мембрану насыпан мелкий песок. Мембрана совершает колебания с частотой $\nu = 500$ гц в вертикальной плоскости. Какова амплитуда колебаний мембраны, если песчинки подскакивают на высоту $h = 3$ мм по отношению к положению равновесия мембраны?*

◆

Пусть колебания мембраны происходят по закону

$$x = A \sin \omega t,$$

где x — смещение от положения равновесия, A — амплитуда, $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота колебаний. В начальный момент времени $t = 0$ мембрана и песчинки на ней находятся в положении равновесия. Затем мембрана удаляется от положения равновесия, например, вверх.

На песчинку, движущуюся вместе с мембраной, действуют две силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила $\mathbf{N}$ реакции мембраны (рис. 8). Запишем уравнение движения песчинки:

$$N - mg = ma.$$

В момент отрыва песчинки сила реакции N обращается в нуль, и, следовательно, ускорение песчинки $a = -g$. Таким образом, песчинка отрывается от мембраны в тот момент времени t_0, когда ее ускорение равно $-g$. Дальше песчинка продолжает двигаться до высоты h как тело, брошенное вертикально вверх на высоте h_0, равной отклонению мембраны от положения равновесия в момент t_0, с начальной скоростью v_0, равной скорости мембраны в тот же момент t_0 (см. рис. 8). По закону сохранения механической энергии

$$mgh_0 + \frac{mv_0^2}{2} = mgh. \qquad (*)$$

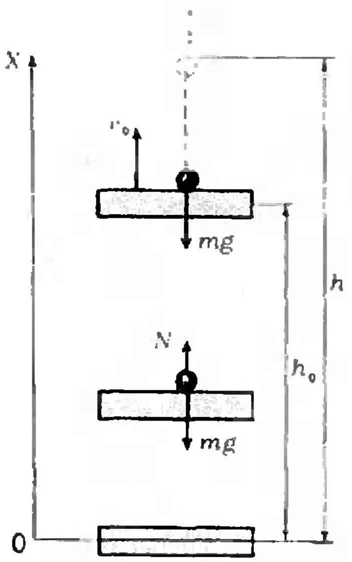


Рис. 8.

Рассмотрим теперь более подробно движение мембраны и свяжем величины h_0 и v_0 с амплитудой колебаний мембраны.

Скорость мембраны в любой момент времени равна $v = \omega A \sin(\omega t + \pi/2) = \omega A \cos \omega t$, а ускорение $a = -\omega^2 x = -\omega^2 A \sin \omega t$. В момент отрыва t_0

$$v = v_0 = \omega A \cos \omega t_0,$$
$$a = -g = -\omega^2 A \sin \omega t_0,$$
$$x = h_0 = A \sin \omega t_0.$$

Из уравнения ускорения $\sin \omega t_0 = \dfrac{g}{\omega^2 A}$, следовательно, $h_0 = g/\omega^2$ и $v_0 = \omega A \cos \omega t_0 = \sqrt{\omega^2 A^2 - g^2/\omega^2}$

Подставив значения h_0 и v_0 в уравнение (*), получим

$$A = \frac{\sqrt{2gh\omega^2 - g^2}}{\omega^2} \approx 77{,}2 \cdot 10^{-6} \ м \approx 0{,}077 \ мм.$$

Б. Б. Буховцев

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Учитесь делать дополнительные построения

С. Б. Белый

Почти каждую геометрическую задачу можно решить несколькими способами. Всегда интересно попытаться найти наиболее простое, «красивое» решение — тем более, что такие решения высоко оцениваются экзаменаторами. В этом очень часто помогают дополнительные построения. В одних случаях эти построения напрашиваются сами собой, в других они не так очевидны и требуют от решающего большого опыта, изобретательности, геометрической интуиции.

Перейдем к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. *На катетах AC, BC прямоугольного треугольника вне его построены квадраты $ACDE$ и $BCKF$. Из точек E и F на продолжение гипотенузы опущены перпендикуляры EM и FN. Доказать, что $EM + FN = AB$.*

В прямоугольном треугольнике ACB проведем высоту CL (см. рис. 1). Очевидно, что $\Delta ACL = \Delta EAM$, $\Delta BCL = \Delta FBN$. Поэтому $EM = AL$, $FN = LB$, $EM + FN = AL + LB = AB$.

Задача 2. (МФТИ, 1970). *Найти высоту равнобедренной трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна S.*

Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD до пересечения с продолжением основания трапеции AD в точке E (см. рис. 2). Так как трапеция равнобедренная, а диагонали ее взаимно перпендикулярны, то треугольник ACE — равнобедренный и прямоугольный (докажите!). В треугольнике ACE проведем высоту CF, обозначим ее длину через h. Ясно, что $AF = CF$, но AF равно средней линии трапеции, поэтому $S = h^2$. Следовательно, $h = \sqrt{S}$.

Как видим, эта задача совсем простая, основной трудностью при

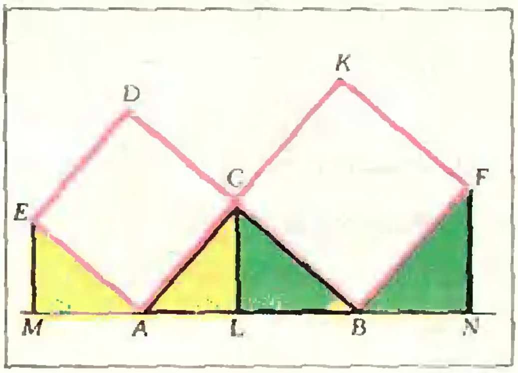


Рис. 1.

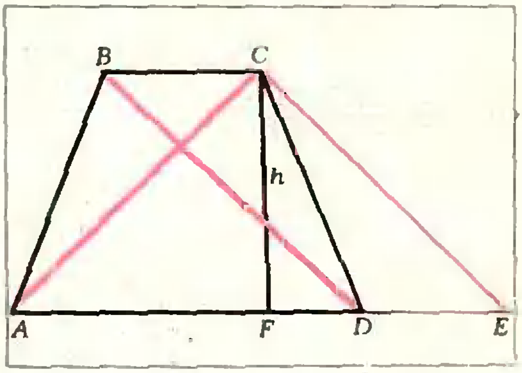


Рис. 2.

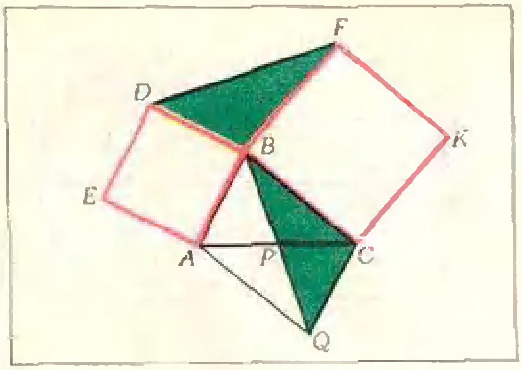


Рис. 3.

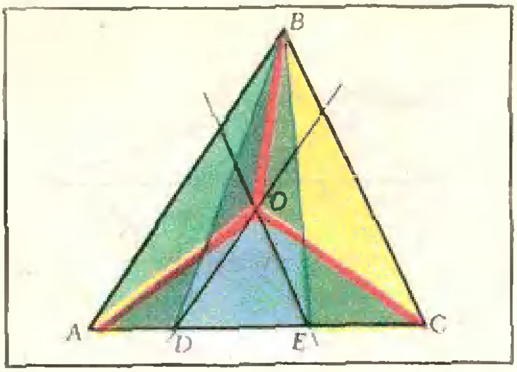


Рис. 4.

ее решении было догадаться сделать подходящие дополнительные построения.

З а д а ч а 3. *На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ABDE$ и $BCKF$. Доказать, что отрезок DF в два раза больше медианы BP треугольника.*

Достроим треугольник ABC до параллелограмма, а медиану BP продолжим до его диагонали (см. рис. 3). Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle DBF = 180^\circ - \alpha$. Но и $\angle BCQ = 180^\circ - \alpha$, а стороны, заключающие эти углы, также равны между собой, поэтому $\Delta DBF = \Delta QCB$. Следовательно, $BQ = 2BP = DF$.

З а д а ч а 4. *Внутри треугольника найти такую точку, что если ее соединить отрезками прямых с вершинами треугольника, то треугольник разделится на три части, площади которых относятся как $m : n : q$.*

Основание AC треугольника ABC разделим точками D и E на три части в данном отношении $m : n : q$ (рис. 4). Через точку D проведем прямую, параллельную стороне AB, а через точку E — прямую, параллельную BC. Докажем, что точка O пересечения этих прямых — искомая. Для доказательства соединим вершину B с точками D и E. $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABD}$, так как эти треугольники имеют общее основание AB и равные высоты. Аналогично $S_{\Delta BOC} = S_{\Delta BEC}$, а следовательно и $S_{\Delta AOC} = S_{\Delta DBE}$. Но площади треугольников ABD, DBE, EBC относятся как $m : n : q$, так как все они имеют одинаковую высоту. Следовательно, $S_{\Delta AOB} : S_{\Delta AOC} : S_{\Delta BOC} = m : n : q$.

З а д а ч а 5. *Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая l, пересекающая стороны AB и AC. Доказать, что сумма расстояний от прямой l до вершин B и C равна расстоянию от нее до вершины A.*

Пусть O — точка пересечения медиан треугольника, AD — медиана (рис. 5). Опустим перпендикуляры BM, DL, CN, AK на прямую l. Легко видеть, что DL — средняя линия трапеции $BMNC$, $DL = \frac{BM + CN}{2}$, и $\Delta AKO \sim \Delta DLO$, поэтому $\frac{DL}{AK} = \frac{DO}{OA} = \frac{1}{2}$ и $AK = 2DL = BM + CN$.

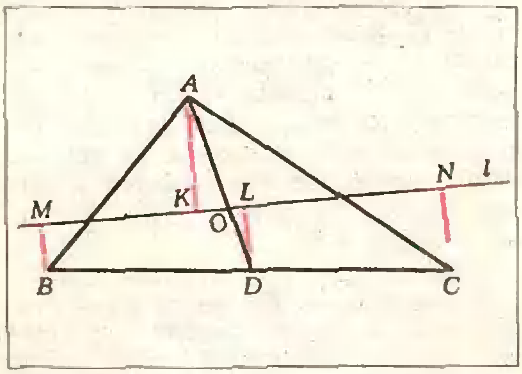


Рис. 5.

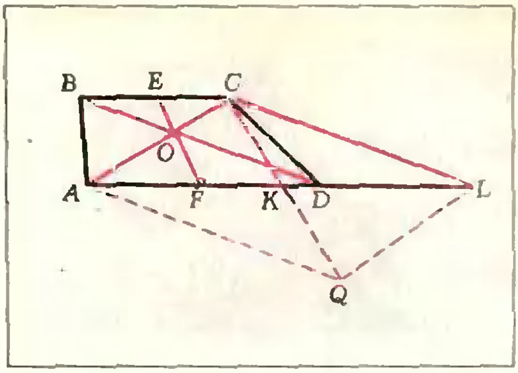


Рис. 6.

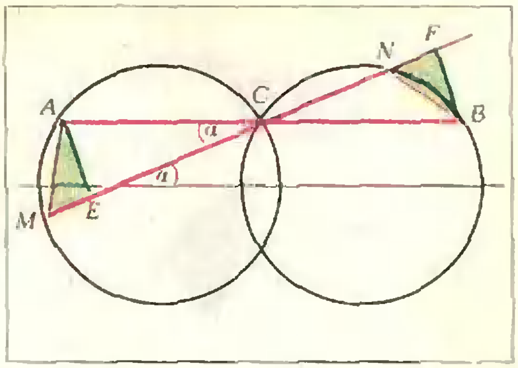


Рис. 7.

З а д а ч а 6. (МГУ, мехмат, 1973). *В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найти площадь трапеции.*

Прежде всего заметим, что точки E и F — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ (см. рис. 6) — и точка O пересечения диагоналей лежат на одной прямой (докажите!). Через точку C проведем две прямые: одну параллельно диагонали BD до пересечения с продолжением основания AD в точке L, другую — параллельно EF. Поскольку OF — медиана треугольника AOD, то CK — медиана треугольника ACL. Теперь достроим треугольник ACL до параллелограмма, а медиану CK до его диагонали. $S_{\square ABCD} = S_{\Delta ACL} = S_{\Delta ACQ}$ (почему?). Остается заметить, что ΔACQ прямоугольный, $S_{\Delta ACQ} = 6$.

З а д а ч а 7 (МФТИ, 1970). *Две равные окружности пересекаются в точке C. Через точку C проведены две прямые, пересекающие данные окружности в точках A, B и M, N соответственно. Прямая AB параллельна линии центров, а прямая MN образует угол α с линией центров. Длина AB равна a. Найти длину отрезка MN.*

Из точек A и B опустим перпендикуляры AE и BF на прямую MN (см. рис. 7). Пусть $\angle AMC = \beta$, тогда $\angle CNB = 180° - \beta$ (почему?), а $\angle FNB = \beta$. Из равенства треугольников AEC и BFC (по гипотенузе и углу) следует, что $AE = BF$. А так как $\angle AMC = \angle FNB$, то $\Delta AEM = \Delta BFN$ и $ME = NF$. Поэтому $MN = EF = EC + CF =$

$$= \frac{a}{2}\cos\alpha + \frac{a}{2}\cos\alpha = a\cos\alpha.$$

З а д а ч а 8 (МФТИ, 1973). *Две окружности радиусов R и r ($R > r$) имеют внешнее касание в точке A. Через точку B, взятую на большей окружности, проведена прямая линия, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найти длину отрезка BC, если хорда AB равна a.*

Через центр O меньшей окружности и точку B проведем прямую (см. рис. 8). Тогда $BC^2 = OB^2 - r^2$. По теореме косинусов

$$OB^2 = (R + r)^2 + R^2 - 2R(R + r)\cos\angle AO_1B,$$

откуда

$$\cos\angle AO_1B = \frac{2R^2 - a^2}{2R^2}.$$

Следовательно,

$$BC^2 = (R + r)^2 + R^2 - 2R(R + r) \times \frac{2R^2 - a^2}{2R^2} - r^2 = a^2\left(\frac{R + r}{R}\right),$$

$$BC = a\sqrt{1 + \frac{r}{R}}.$$

З а д а ч а 9 (МГУ, биофак, 1973). *Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диаго-*

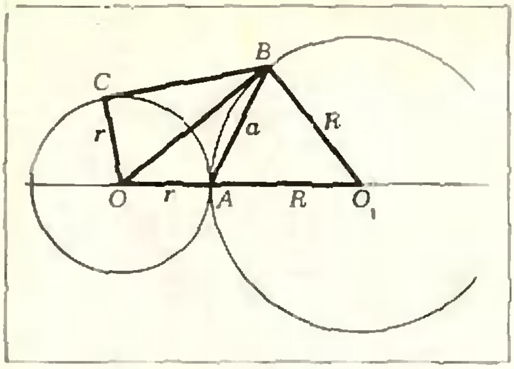


Рис. 8.

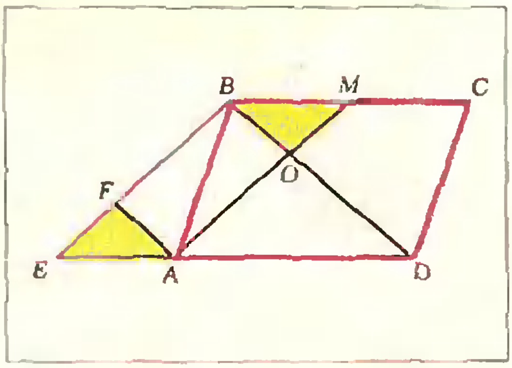


Рис. 9.

наль BD в точке O. Найти площадь четырехугольника OMCD.

Через точку B проведем прямую *параллельно* AM до пересечения с продолжением стороны AD в точке E, а через точку A — прямую AF параллельно BD (см. рис. 9), $S_{\triangle EBD}=\frac{3}{4}$ (почему?). Теперь в силу подобия треугольников EFA и EBD мы можем записать: $\frac{S_{\triangle EFA}}{S_{\triangle EBD}}=\frac{EA^2}{ED^2}$.

Но $\frac{EA^2}{ED^2}=\frac{1}{9}$, отсюда находим

$S_{\triangle EFA}=\frac{1}{12}$. Но $S_{\triangle EFA}=S_{\triangle BOM}$, и теперь мы можем найти площадь четырехугольника $OMCD$:

$$S_{OMCD}=S_{\triangle BDC}-S_{\triangle BOM}=\frac{5}{12}.$$

Сделаем некоторые выводы. Приступая к решению геометрической задачи, нужно иметь в виду, что обычно геометрическая задача может быть решена несколькими способами. Поэтому, если у вас появилась идея решения задачи, но вы видите, что путь к решению довольно длинный, то постарайтесь найти другой подход к решению. При этом следует помнить, что существенную помощь могут оказать дополнительные построения.

Упражнения

1 (МФТИ, 1963). Найти площадь треугольника, медианы которого равны 12, 15 и 21 *см*.

2 (МФТИ, 1967). Основания равнобочной трапеции относятся как 3 : 2. На большем основании, как на диаметре, построена окружность, высекающая на меньшем основании отрезок, равный половине этого основания. В каком отношении окружность делит боковые стороны трапеции?

3 (МФТИ, 1969). В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а основания относятся, как $m:n$. Найти отношение диагоналей трапеции.

4 (МФТИ, 1970). В трапеции $ABCD$ длина большего основания AD равна a, $BC\perp CD$, $AB=BC$, $BD\perp AB$. Найти стороны трапеции.

5. (МФТИ, 1970). В равнобедренной трапеции с острым углом α при основании окружность, построенная на боковой стороне как на диаметре, касается другой боковой стороны. В каком отношении она делит большее основание трапеции?

6 (МГУ, экономич. ф-т, 1964). В трапеции с основаниями a и b через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции.

7 (МГУ, химфак, 1967). В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, находящейся между точками B и C, причем $CD:BC=\alpha$ (где $\alpha<\frac{1}{2}$). На стороне BC между точками B и D взята точка E и через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найти отношение площадей трапеции $ACEF$ и треугольника ADC, если известно, что $CD=DE$.

8 (МГУ, мехмат, 1973). В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований $AB=5$ и $CD=3$. Найти площадь трапеции, если треугольник AMB — прямоугольный, а DK — высота трапеции.

РЕЦЕНЗИИ. БИБЛИОГРАФИЯ

История математики

В трехтомном коллективном труде «История математики» (изд. «Наука», М., 1970—1972), в подготовке которого участвовали профессора А. П. Юшкевич — он же редактор всего издания, — И. Г. Башмакова, Б. А. Розенфельд и другие видные специалисты в этой области, описана история математики с древнейших времен до XIX столетия.

Для правильного понимания современной науки необходимо знание ее истории. Тем более полезна история, содержащая изложение сущности основных открытий, идей, методов. Рецензируемая книга вводит читателей в мир науки, иногда похожий на мир фантазии. Она написана таким увлекательным и ярким языком, что читается с необычной легкостью.

Первый том состоит из двух частей: «Математика в древности» и «Математика в средние века». Сначала освещается развитие математики в доисторические времена, развитие счета, возникновение числовых обозначений, геометрических понятий. Затем читатель знакомится с математикой древнеегипетского царства, с первыми папирусами, с вавилонской шестидесятеричной системой счисления и клинописной записью решения некоторых квадратных уравнений, с измерением площадей и объемов и первыми применениями теоремы Пифагора в общем случае. Чрезвычайно интересно приведенное в конце первой части описание истории математики древней Греции. Если до этого решались отдельные задачи, то в древней Греции родилась наука. Книга знакомит читателя с наиболее видными древнегреческими учеными и их трудами. Из второй части первого тома читатель узнает о математике древнего и средневекового Китая, древней и средневековой Индии, затем дается описание математики в странах ислама VIII—X веков, в частности, Средней Азии. Далее рассматривается математика феодальной Европы и Закавказья, ее возникновение и влияние на ее развитие математики древней Греции, Византии и арабов. Интересно описание математики и рассказы о математиках эпохи Возрождения.

Второй том знакомит читателя с революцией в математике в XVII столетии. Подробно рассматриваются открытия в каждой области науки. Здесь читатель знакомится с Декартом, его геометрией, математическими работами Ферма, Дезарга и многих других математиков. Интересна и вполне доступна глава, знакомящая читателей с открытием дифференциального и интегрального исчисления Ньютоном и Лейбницем.

Третий том знакомит читателя с математикой XVIII столетия, временем бурного развития различных отраслей математики и в первую очередь математического анализа. В этой главе дается описание трудов одного из крупнейших математиков XVIII века петербургского академика Эйлера, а также Маклорена, Даламбера, Д. Бернулли, Лагранжа, Гаусса и других.

Более сложна глава по теории вероятностей. Для чтения ее математической части требуется знание основных понятий теории вероятностей. Но и описательная ее часть сама по себе интересна.

Отдельная глава посвящена геометрии. В ней рассматриваются аналитическая и дифференциальная геометрия на плоскости и в пространстве, кривые высших порядков. Особо освещаются работы Клеро, Монжа, Эйлера. Интересно изложена история и основные понятия сферической геометрии и тригонометрии.

Две заключительные главы относятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными и вариационному исчислению. Большая часть материала этих глав требует специальной математической подготовки. Однако читатели «Кванта» могут по этим главам познакомиться с историей вопроса и постановкой задач.

К сожалению, тираж этой интересной и хорошо оформленной книги невелик и она уже стала библиографической редкостью. Необходимо переиздать книгу большим тиражом в расчете на массового читателя: учащихся физико-математических школ, учителей, студентов и вообще любителей математики.

И. С. Петраков

Книга о космических фейерверках

«В период Чжун-Цин, во второй год, 10-ю луну в день Квэй-Хао появилась необыкновенная звезда посредине Нан-Мэн. Она была величиной с бамбуковые счеты и последовательно показывала пять цветов. Постепенно она уменьшала свой блеск к 6-й луне следующего года, когда исчезла». Так со ссылкой на лунный календарь и счетом лет по периодам правления императоров рассказывается в китайской летописи о появлении звезды-гостьи. Ученые установили, что эта звезда появилась 7 декабря 185 г. н. э. и была видна до июля 186 г.

Что же происходило в это время на небе? Астрономы уверены, что в летописи говорится о вспыхнувшей сверхновой звезде, ставшей ярче Венеры.

Вспышки сверхновых — очень редкое явление. В нашей Галактике последнюю вспышку сверхновой наблюдали Кеплер и его современники в 1604 году. Конечно, это не означает, что с тех пор в Галактике не вспыхивали сверхновые, так как некоторые из них астрономы могли случайно не заметить, а другие не были видны с наблюдательного пункта.

Но астрономия XX века далеко шагнула за пределы нашей Галактики. В беспредельном мире галактик астрономы регулярно открывают сверхновые: с 1885 г. число сверхновых, зарегистрированных в других галактиках, превысило 400. Уже налажено патрулирование галактик с целью открытия в них сверхновых. В эту работу включились астрономы многих стран.

Но почему вспышки сверхновых так интересуют астрономов? Наблюдаемое гигантское увеличение блеска (некоторые из сверхновых иногда превосходят по блеску галактику, в которой они вспыхнули!), а также тщательный анализ спектров сверхновых и непрерывно расширяющихся оболочек, выброшенных этими звездами, свидетельствуют о том, что сверхновые — это взрывающиеся звезды. Вспышки сверхновых относятся к одному из самых грандиозных явлений, происходящих сейчас во Вселенной, уступая, пожалуй, лишь загадочным процессам в ядрах галактик и квазаров. Астрономы имеют серьезные основания думать, что исследование далеко еще не ясных процессов, вызывающих и сопровождающих вспышки сверхновых, окажет существенное влияние на наши представления о происхождении и развитии звезд, о синтезе химических элементов во Вселенной, о происхождении космических лучей, о природе нетеплового оптического, рентгеновского, гамма- и радиоизлучений.

О том, как буквально по крупицам сведений постепенно складывались наши знания о сверхновых и новых звездах, рассказывается в книге московского астронома Ю. П. Псковского, которая так и называется. «Новые и сверхновые звезды» *).

Со сверхновыми читатель встретится во второй части книги, на страницах которой очень «физично», образно и доступно повествуется о том, как астрономы открывают и исследуют сверхновые звезды.

Вы наверняка с огромным интересом прочитаете о пульсарной эпопее, узнаете о том, как английские радиоастрономы во главе с профессором А. Хьюишем открыли пульсары по поразительно строгой периодичности всплесков их радиоизлучения, как ученые пришли к мысли о том, что пульсары — это быстровращающиеся нейтронные звезды. Те самые нейтронные звезды, которые около сорока лет назад были предсказаны академиком Л. Д. Ландау и некоторыми другими физиками-теоретиками, но до сих пор оставались неоткрытыми, несмотря на многочисленные титанические попытки астроомов-наблюдателей, мечтавших обнаружить нейтронные звезды во Вселенной.

Открытие пульсаров позволило астрономам «увидеть» финальную стадию эволюции некоторых звезд. Такие звезды в конце своего жизненного пути должны стремительно сжиматься. Начинают разрушаться и дробиться на нейтроны и протоны ядра атомов вещества звезды. Образовавшиеся протоны поглощают электроны и, выделяя энергию, тоже превращаются в нейтроны. Образование нейтронной звезды — катастрофический взрывной процесс с бурным выделением энергии. При взрыве возникает ударная волна, выбрасывающая наружные слои звезды и порождающая расширяющуюся газовую оболочку. Все это мы и видим как вспышку далекой сверхновой. Далекой? А не может ли сверхновая вспыхнуть где-нибудь поблизости? А не вспыхивали ли такие звезды вблизи нашей Солнечной системы в прошлом? И на эти вопросы вы найдете ответы в книге Ю. П. Псковского.

Мы уже упомянули, что сверхновым посвящена не вся книга Ю. П. Псковского, а лишь вторая ее половина. О чем же рассказывается в первой? Прежде всего об обыкновенных звездах и о

*) Ю. П. Псковский. Новые и сверхновые звезды. М., «Наука», 1974.

новых звездах. Автор очень сжато и понятно сообщает много важных сведений о природе звезд. Особенно содержательны главы, посвященные различным типам новых звезд. Одним из существенных результатов, полученных в итоге недавних исследований новых звезд, является вывод о том, что новые звезды, как правило, входят в состав двойных систем звезд. Астрономы давно исследуют различные типы двойных звезд, но лишь сравнительно недавно выяснилось, что одним из компонентов двойной системы может быть не обыкновенная звезда, а новая или новоподобная. Возможны и еще более экзотически варианты, когда в паре с обычной звездой оказывается «обыкновенный» радиопульсар или рентгеновские источники, или даже «черные дыры»...

Ю. П. Псковский подробно описывает, как выглядит процесс развития вспышки новой; рассказывает о гипотезах, касающихся причин взрыва в новых звездах. Автор книги приходит к выводу, что «гипотезы о причинах вспышек новых звезд пока еще носят чисто схематический характер и только начинают разрабатываться всерьез». Вместе с тем он подчеркивает, что «для астрономов стало несомненно: наше Солнце не принадлежит и не будет принадлежать к классу звезд, из которых образуются новые». Это, конечно, чрезвычайно важный и очень приятный для обитателей Земли вывод: вряд ли кому-либо доставило бы удовольствие узнать, что наше Солнце — звезда, способная взорваться если не как сверхновая, то хотя бы как новая!

В книге Ю. П. Псковского много сложного материала. Но стремление автора изложить его в интересной и доступной для неспециалиста форме делает книгу увлекательной и полезной, особенно для тех, кто интересуется астрономией и «астрономическими приложениями» физики.

Е. П. Левитан

Вечный двигатель?

Представьте себе, что два шара (назовем их A и B) погружены в жидкость. Плотность жидкости равна ρ, плотности шаров соответственно ρ_1 и ρ_2, их объемы — V_1 и V_2. Будем считать, что жидкость занимает все пространство, шары взаимодействуют между собой и с жидкостью гравитационными силами, а плотности их таковы, что $\rho_1 < \rho < \rho_2$.

Рассмотрим поведение шаров в жидкости. На шар A действует сила притяжения со стороны шара B и сила притяжения со стороны «зеркального изображения» шара B — шарика жидкости объема $V_2' = V_2$. Силы притяжения шара A ко всем другим объемам жидкости скомпенсированы. Так как $\rho_2 > \rho$, то результирующая сила, действующая на шар A, будет направлена в сторону шара B. Те же самые рассуждения показывают, что результирующая сила, действующая на шар B, будет направлена от шара A. Действующие на шары силы будут сообщать им ускорения. Таким образом, шар B будет убегать от A, а шар A будет догонять B. Подобрав размеры шаров и их плотности так, чтобы сообщаемые ускорения были одинаковы (например, пусть размеры шаров одинаковы, а $\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$), получим систему, которая может быть разогнана сама собой до сколь угодно больших скоростей. А как же быть с законом сохранения энергии? И импульса? Нельзя ли таким способом создать вечный двигатель?

Увы! Вечный двигатель не выйдет. В своих рассуждениях, которые привели нас к парадоксу, мы забыли еще одну силу, действующую на каждый шарик. Попробуйте найти эту силу. Найдите, как на самом деле будут вести себя шарики. Рассмотрите, что произойдет, если оба шара будут тяжелее или легче жидкости. Вы увидите замечательные явления: в некоторых случаях шары будут притягиваться друг к другу, в других случаях отталкиваться — совсем как электрические заряды. Попробуйте наиболее полно решить эту задачу, рассмотреть все возможные варианты и пофантазировать. Вы получите удовольствие, как от настоящего научного исследования.

В. К. Игнатович,
А. А. Чешков

Новые книги

В этом номере мы публикуем аннотации на книги, выходящие в IV квартале 1975 года. Заказы на книги надо оформлять через специализированные магазины или магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. Маркушевич А. И. *Целые функции.* Издание 2-е. Объем 5 л., тираж 30 000 экз., цена 15 к.

Все важнейшие функции, изучаемые в курсе математики средней школы, являются либо целыми (многочлен, показательная функция, синус, косинус), либо частными двух целых функций (дробно-рациональная функция, тангенс, котангенс и т. д.), либо, наконец, функциями, обратными по отношению к названным. Однако элементарные функции — это лишь простейшие представители обширного класса целых функций.

Настоящая книжка знакомит читателя, не владеющего этой теорией, с важнейшими свойствами целых функций. Книга рассчитана на всех лиц, желающих расширить и углубить свои математические познания.

2. Лысенко В. И. *Николай Иванович Фусс (1755—1825).* Объем 7 л., тираж 10 000 экз., цена 50 к.

В книге освещена жизнь, научная и педагогическая деятельность математика, механика, астронома Николая Ивановича Фусса (1755—1825), действительного члена Петербургской академии наук, ее непременного секретаря, сотрудника и ближайшего помощника знаменитого Леонарда Эйлера. В книге использованы материалы Архива Академии наук СССР и редкие печатные источники, дан обзор трудов Н. И. Фусса, приведена обширная библиография.

Книга рассчитана на всех любителей истории математики.

Издательство «Просвещение»

3. *Хрестоматия по истории математики.* Под редакцией А. П. Юшкевича. Объем 23 л., тираж 40 000 экз., цена 90 к.

Предлагаемая книга содержит подборку оригинальных текстов по арифметике, алгебре, теории чисел и геометрии, характеризующих развитие указанных областей математики, начиная с древнего Вавилона и древнего Египта.

Книга будет полезна учителям математики, ученикам старших классов, а также всем интересующимся математикой и ее историей.

4. Кордемский Б. А. *Математика изучает случайности.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 38 к.

Книга представляет собой популярное введение в теорию вероятностей. Она рассчитана на учащихся старших классов средней школы. На конкретных примерах, взятых из реальной жизни и различных областей науки, читатель постепенно знакомится со своеобразием мира случайных событий, с их основными законами.

В пособии рассказывается о создателях науки, дается краткий обзор начальных этапов ее развития. В конце каждой главы имеется достаточный набор задач для самостоятельного решения.

Физика

Издательство «Наука»

1. *Элементарный учебник физики.* Под редакцией Г. С. Ландсберга. Том III. (Колебания и волны, оптика, строение атома.) Издание 9-е. Объем 36 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 13 к.

Достоинством курса является глубина изложения физической стороны различных процессов в природе и технике. Изложение материала ведется простым, ясным языком. Книга богато иллюстрирована.

Рассчитана на преподавателей физики и учащихся старших классов средней школы. Может служить ценным пособием для самообразования.

2. Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. *Поиск и открытие планет.* Объем 8 л., тираж 25 000 экз., цена 30 к.

Книга в популярной форме рассказывает о том, как были открыты три планеты Солнечной системы, невидимые невооруженным глазом, — Уран, Нептун и Плутон. Читатель узнает о законах, управляющих движением тел Солнечной системы, и о том, как эти законы были применены к поискам новых планет. Отдельные главы книги посвящены открытиям малых планет — астероидов, а также поискам планет, более близких к Солнцу, чем Меркурий, и более далеких от Солнца, чем Плутон.

3. Идельсон Н. И. *Этюды по истории планетных теорий.* Объем 30 л., тираж 20 000 экз., цена 2 р. 20 к.

Книга известного советского астронома профессора Н. И. Идельсона состоит из отдельных историко-научных очерков-этюдов, в которых в увлекательной форме рассказывается о классических теориях небесной механики: теории тяготения, теории фигуры Земли, теории движений небесных тел.

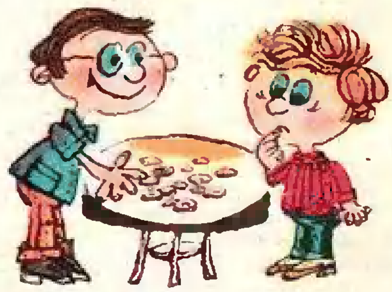
Т. С. Петрова,
М. Л. Смолянский

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Был жаркий день, и четыре супружеские пары, гуляя, выпили в течение дня 44 стакана лимонада. Анна выпила 2 стакана, Мария — 3, Софья — 4, Дарья — 5. Андреев выпил столько же, сколько и его жена; Борисов выпил стаканов вдвое больше, чем его жена; Васильев — втрое больше своей жены, а Груздев выпил стаканов лимонада в четыре раза больше, чем его жена.

Кто на ком женат?



2. Возьмем множество четырехзначных чисел, у которых цифры тысяч и десятков — нечетные, а сотен и единиц — четные, причем в каждом из этих четырехзначных чисел нет одинаковых цифр. Сколько чисел из этого множества делится на девять? Сколько делится на три?

```
-ТОКИО | ИО
 ТОН   | КИО
 -----
  -КИ
   ОН
  -----
   -ТИО
    ТИО
   -----
```

3. У Пети был один рубль монетами достоинством не более 10 копеек. Вася взял у Пети по одной монете каждого типа, и у Пети стало на 15 копеек меньше. Сколько было у Пети монет каждого достоинства, если монет самого большого достоинства было на 4 больше, чем всех остальных монет?

4. В примере на деление одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами (а разные — разными); то, что получилось, вы видите на рисунке. Попробуйте восстановить пример.

5. Термометр быстро вынимают из расплавленного олова. И в первый момент столбик ртути немного поднимается. Объясните, почему это происходит.

Рисунки Э. Назарова

Головоломки Дьюдени

На страницах нашего журнала не раз упоминались имена многих известных популяризаторов математики: Гуго Штейнгауза, Сэма Лойда, Мартина Гарднера, Льюиса Кэррола (автора, по-видимому, знакомой всем и любимой всеми «Алисы в Стране Чудес»). Сейчас мы хотим рассказать вам еще об одном замечательном мастере головоломок — Генри Э. Дьюдени (1857—1930): в этом году, в той же серии, что и три книги Гарднера, книги Штейнгауза и Кэррола, вышла его прекрасная книга «520 головоломок» *).
Составление и решение головоломок было для Дьюдени не только профессией (Дьюдени — талантливый самоучка: он никогда не учился в колледже) — это было его призванием, делом его жизни. Если какая-нибудь интересная идея приходила ему в голову за обедом, то он в задумчивости начинал рисовать... прямо на скатерти. Ответы же, которые сам Дьюдени давал к своим головоломкам (их мы опубликуем в следующем номере «Кванта»), очень часто даже и нельзя назвать «решениями» — скорее это блестящие догадки. Книга «520 головоломок» будет, безусловно, интересна всем любителям математики. Вам же, ребята, она будет особенно полезна: в ней очень много доступных для вас задач. Ниже мы публикуем подборку задач из книги Г. Э. Дьюдени. Публикацию подготовила И. Н. Клумова.

Лестницы метро

Как-то, выходя из станции метро «Керли-стрит», мы столкнулись с молодым атлетом Перси Лонгменом. Он остановился на эскалаторе и сказал:

— Вверх по эскалатору я всегда иду. Знаете ли, лишняя тренировка никогда не помешает. Этот эскалатор самый длинный на линии — почти тысяча ступенек. Но вот что интересно — и это относится и к другому, меньшему эскалатору, по которому мне часто приходится подниматься: если, поднимаясь вверх, я шагаю через две ступеньки, то на последний шаг приходится одна ступенька; если я шагаю через три ступеньки — то две ступеньки; если через четыре,— то пять; если через пять — то четыре; если через шесть — то пять и, наконец, если я шагаю через семь ступенек, то на последний шаг приходится шесть ступенек. Почему так происходит, не знаю.

Когда Перси пошел дальше вверх, перешагивая через три ступеньки сразу, мы рассмеялись и мой спутник сказал:

— Он едва ли подозревает, что если бы делал шаги в 20 ступенек, то на последний шаг ему их осталось бы 19!

Сколько ступенек в эскалаторе на станции «Керли-стрит», если верхнюю площадку считать ступенькой, а нижнюю нет? **)

Взвешивание ребенка

— Прошлым летом я был свидетелем одного забавного случая на железнодорожной станции, — сказал мой приятель. — Небольшая семья стояла перед автоматическими

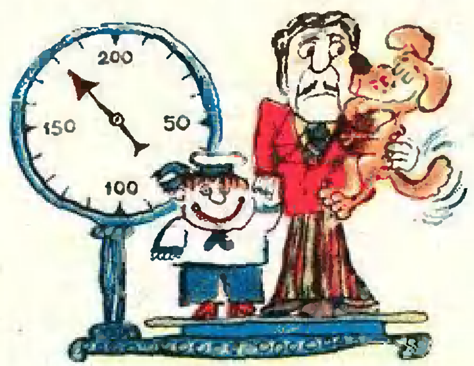
*) Генри Э. Дьюдени. 520 головоломок. М., «Мир», 1975.

**) Автор исходит из молчаливого предположения, что эскалаторы неподвижны весами, рассчитанными на 200 фунтов, безрезультатно пытаясь решить трудную задачу — взвесить ребенка. Едва родители оставляли ребенка одного на весах, он начинал реветь и спрыгивал с них, при этом отцу приходилось удерживать собаку Фидо, тоже желавшую принять участие в этой операции. Наконец, отец вместе с ребенком и Фидо взобрался на весы, а я их сфотографировал.

Тут приятель показал мне фотографию, с которой я срисовал показания весов.

— После этого мужчина повернулся к своей жене и сказал: «Мне кажется, дорогая, что вместе с ребенком я вешу на 162 фунта больше, чем собака, а собака весит на 70% меньше, чем ребенок. Нам дома следует все хорошенько обдумать».

Мне тоже захотелось разобраться самому в этой задаче. Как вы думаете, сколько весило милое дитя?



Решающий голос

Съезд Объединенного общества странствующих попрошаек (более известного под названием Союза бродяг) собрался, чтобы решить вопрос о том, следует ли объявить забастовку, требуя сокращения рабочего дня и увеличения подаяний. Было решено, что при голосовании те члены общества, которые отдадут свои голоса в пользу забастовки, останутся стоять, а те, кто против, сядут.

— Джентльмены, — сказал председатель собрания после подсчета голосов, — я имею удовольствие сообщить, что забастовка утверждена большинством голосов, составляющим четвертую часть оппозиции. (*Громкие возгласы одобрения.*)

— Господин председатель, — крикнули сзади, — кое-кто из нас не смог сесть.

— Почему?

— Да здесь нет стульев.

— Тогда, быть может, те, кто хотел, но не смог сесть, не откажутся поднять руки... Я вижу, вас двенадцать человек, так что забастовка отменяется большинством в один голос. (*Свистки и беспорядок в зале.*)

Сколько членов общества попрошаек участвовало в голосовании?

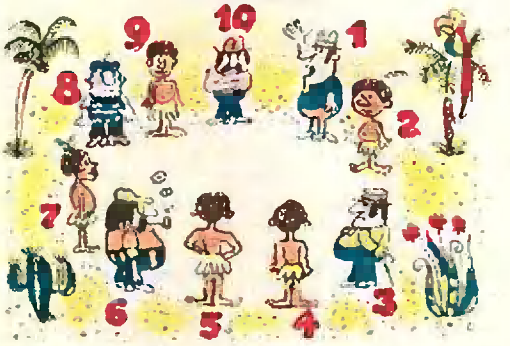
Исправьте ошибку

Хильде Вильсон потребовалось умножить некоторое число на 409, но она сделала ошибку, которую часто допускают дети, начинающие изучать арифметику: первую цифру произведения на 4 она поместила не под третьей цифрой справа, как положено, а под второй. (Мы все так делали в детстве, когда в сомножителе встречался нуль.) В результате этой маленькой ошибки Хильда получила число, отличающееся ни много, ни мало на 328 320 от правильного ответа.

Какое число Хильда умножала на 409?

Пэт Мерфи

Много лет назад произошел такой случай. Участники одной экспедиции попали в лапы кровожадных дикарей. Их вождь, получив богатые подарки, наконец смягчился и



разрешил пленникам уйти, но при условии, что половина из них будет выпорота. В состав экспедиции входило 5 англичан и 5 туземцев-носильщиков. Англичане решили избежать порки, встав в круг таким образом, как показано на рисунке, и поручив Пэту Мерфи (№ 1) назвать число, отсчет до которого использовался бы в качестве считалочки. Тот, на кого выпадало названное число, выходил из круга и отправлялся на экзекуцию, а счет продолжался с этого места снова и до тех пор, пока названное число не выпадало на следующего человека, и т. д.

Если бы Пэт правильно запомнил число и начал счет с того, кого нужно, то замысел белых удался бы на славу. Но бедный Пэт перепутал число и не с того человека начал счет. В результате все англичане оказались выпоротыми, а носильщики нет.

Не могли бы вы указать:

1) число, которое назвал бедняга Пэт, и человека, с которого начинался счет;

2) число, которое следовало назвать, и человека, с которого следовало начинать счет?

В каждом случае нужно найти минимальное число.

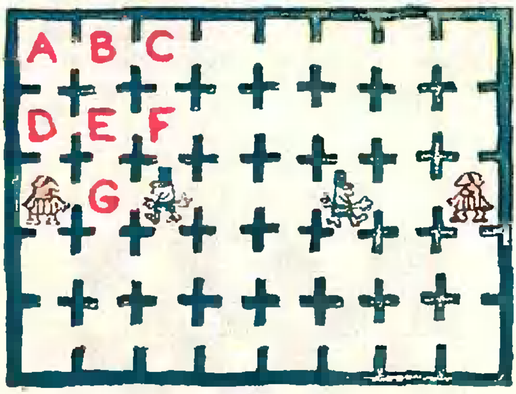
Кошки и мышки

Однажды утром за столом профессора Рэкбрейна оживленно обсуждался вопрос об уничтожении грызунов, когда внезапно профессор сказал:

— Если некоторое количество кошек съели в общей сложности 999 919 мышек, причем все кошки съели по одинаковому числу мышек, то сколько всего было кошек?

Кто-то высказал предположение о том, что, быть может, одна кошка съела всех мышек, но Рэкбрейн возразил, что он сказал *«кошек»*. Тогда кто-то другой дерзнул предположить, что каждая кошка съела одну мышь, но профессор заметил, что он сказал *«мышек»*. Он добавил также, дабы помочь присутствующим, что каждая кошка съела больше мышек, чем было кошек.

Какой же ответ будет верным?



Погоня

Начертите на листе бумаги поле, которое изображено на рисунке и воспользуйтесь фишками, представляющими двух охранников (люди в высоких шапках) и двух узников. Вначале разместите фишки так, как показано на рисунке. Первый игрок передвигает каждого охранника через дверь из одной камеры в любую соседнюю. Затем второй игрок передвигает каждого узника через дверь в любую соседнюю камеру и т. д. до тех пор, пока каждый охранник не схватит своего узника. Если какой-либо охранник хватает узника, то он вместе со своей жертвой выбывает из игры, а другая пара продолжает игру.

Например, охранник может пойти в камеру F (для простоты мы рассмотрим лишь одну пару охранник-узник), затем узник перейдет в камеру D, охранник — в камеру E, узник — в камеру A, охранник — в камеру B, узник — в камеру D и т. д. Может показаться, что погоня охранника за узником безнадежно затянется, но, проявив немного смекалки, вы сумеете настичь беглеца.

Путь мухи

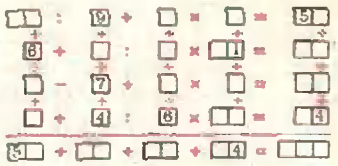
Муха села на левый верхний квадрат шахматной доски (см. рисунок), а затем проползла по всем белым квадратам. При этом она ни разу не заползла на черный квадрат и не прошла по одному и тому же пересечению (где пересекаются вертикальная и горизонтальная линии) более одного раза.

Не могли бы вы начертить путь мухи? Его можно проделать, двигаясь 17 прямыми курсами.

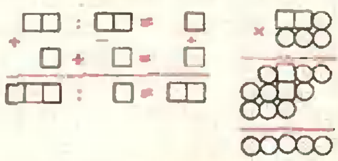
Ребусы

1. В пустые квадратики поставьте соответствующие цифры так, чтобы, производя последовательно (слева направо и сверху вниз) указанные арифметические действия, получать в результате число, стоящее после знака равенства.

Ребус составлен так, что пятый столбец совпадает с пятой строкой. Ни одно число в ребусе не равно нулю и не начинается нулем (кончаться нулем числа могут).



2. В пустые квадратики поставьте соответствующие цифры так, чтобы выполнялись указанные соотношения. Ни одно число в ребусе не равно нулю и не начинается нулем (кончаться нулем числа могут).



3. В примере на умножение одна из цифр всюду заменена квадратиком, а вместо других цифр поставлены кружки. Попробуйте восстановить пример.

Л. П. Мочалов

ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ

К статье «Почему звучит скрипка»

1. Колебания возбуждаются так же, как у струны со смычком, но при падающей зависимости момента сил трения от относительной угловой скорости маятника и оси.

2. Ток в цепи определяется графически точками пересечения прямой $U(i) = \mathscr{E} - iR$ с вольтамперной характеристикой лампы (рис. 1). Скачки тока происходят при значениях сопротивления $R_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ (при уменьшении сопротивления) и $R_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ (при увеличении сопротивления), определяемых наклоном касательных к вольтамперной характеристике. Зависимость тока от сопротивления показана на рисунке 2.

3. При отклонении тока от заданного значения i в цепи возникает э. д. с. индукции, равная $-L\frac{\Delta i}{\Delta t}$, где L — индуктивность вольтовой дуги. Закон Ома в этом случае имеет вид: $\mathscr{E} - L\frac{\Delta i}{\Delta t} = U(i) + iR$. Отсюда находим скорость изменения тока: $\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{\mathscr{E} - iR - U(i)}{L}$. Обратимся теперь к рисунку 6, *б* в статье и исследуем устойчивость токов i_1 и i_2. Легко видеть, что когда ток меняется вблизи значения i_2, увеличению тока соответствует отрицательное значение выражения $\mathscr{E} - iR - U(i)$ и, следовательно, отрицательная скорость изменения тока. Это означает, что после отклонения ток будет уменьшаться, стремясь возвратиться к значению i_2. При уменьшении тока, наоборот, $\frac{\Delta i}{\Delta t} > 0$, и ток будет увеличиваться до величины i_2. Поэтому значение тока i_2 устойчивое. Аналогичные рассуждения для тока i_1 показывают, что это значение неустойчивое — отклонения будут нарастать. Таким образом, мы получаем (так же, как и с помощью энергетических рассуждений), что устойчивым является состояние с полным положительным сопротивлением цепи.

4. Колебания тока в дуге вызывают колебания ее температуры. Вследствие этого температура и плотность воздуха возле дуги также периодически изменяются, и возникает звуковая волна.

К статье «Физика и линейные неравенства»

1. $P_{max} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}\right) m.$

2. Ответ. $R = \frac{8}{11}$ *ом*.

Указание. Если обозначить наибольшее отклонение напряжения от закона Ома через z, то получим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} -z \leqslant 3 - 4R \leqslant z, \\ -z \leqslant 4 - 5R \leqslant z, \\ -z \leqslant 5 - 7R \leqslant z, \\ z \to \min. \end{cases}$$

3. $t_1 \approx 8$ (*с*), $t_2 \approx 46$ (*с*). Указание. Система линейных неравенств и целевая функция имеют вид

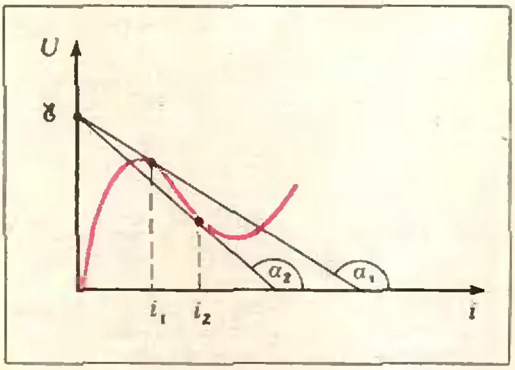


Рис. 1.

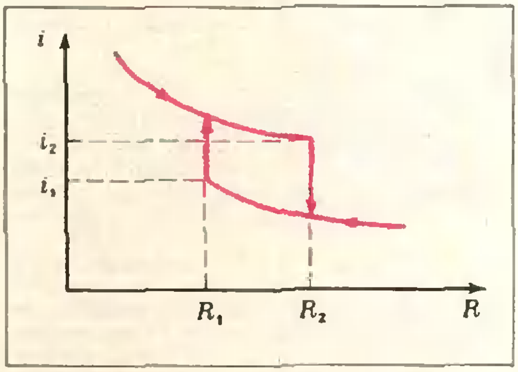


Рис. 2.

$$\begin{cases} 0{,}656 l_1 + 0{,}328 l_2 \geqslant 20, \\ 0{,}304 l_1 + 0{,}608 l_2 \geqslant 30, \\ 0{,}734 l_1 + 0{,}734 l_2 \leqslant 50, \\ z = l_1 + l_2 \to \min. \end{cases}$$

4. $I_1 \approx 990$ (*св*), $I_2 \approx 2260$ (*св*). Указание. Пользуясь законами освещенности, следует составить следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} \dfrac{\cos 0^\circ}{9} I_1 + \dfrac{\cos 45^\circ}{18} I_2 \geqslant 200, \\ \dfrac{\cos 45^\circ}{18} I_1 + \dfrac{\cos 0^\circ}{9} I_2 \geqslant 100, \\ \dfrac{\cos 63^\circ 26'}{45} I_1 + \dfrac{\cos 45^\circ}{18} I_2 \geqslant 100, \\ z = I_1 + I_2 \to \min. \end{cases}$$

К статье «Учитесь делать дополнительные построения»

1. $48\sqrt{6}$ *см*^{2}. Указание. Через вершину A треугольника ABC провести прямую, параллельную медиане m_c до пересечения с продолжением медианы m_b в точке B', и заметить, что $S_{\triangle AOB'} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, где O — точка пересечения медиан.

2. $1:2$, считая от меньшего основания. Указание. Заметить, что боковая сторона трапеции равна радиусу окружности, и воспользоваться теоремой о секущих.

3. $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$. Указание. Через вершину B трапеции $ABCD$ ($AB \perp AD$) провести прямую, параллельную диагонали AC, до пересечения с продолжением основания AD в точке K; в $\Delta KBD \measuredangle B = 90^\circ$.

4. $AB = BC = \dfrac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$, $CD = a\sqrt{\sqrt{5}-2}$. Указание. Опустить перпендикуляр BE на AD.

5. $\sin 2\alpha : 1$. Указание. В трапеции $ABCD$ (AD — большее основание) провести высоту BE, точку O (центр окружности) соединить с точками E и M (точкой касания) и провести прямую $ON \parallel AD$. Рассмотреть подобные треугольники ABE и ONM.

6. $\dfrac{2ab}{a+b}$. Указание. Через точку пересечения искомого отрезка и боковой стороны трапеции провести прямую, параллельную другой боковой стороне, до пересечения с основаниями трапеции; рассмотреть полученные подобные треугольники.

7. $4(1-\alpha)$. Указание. Из точек E и D опустить перпендикуляры на сторону AC.

8. 8. Указание. Через точку M провести прямую, перпендикулярную основаниям трапеции.

К заметке «Вечный двигатель?»

(*см. с. 54*)

На шар A, масса которого $m_1 = \rho_1 V_1$, действует гравитационная сила

$$F_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} - \gamma \frac{m_1 m_2'}{R^2} = \gamma \frac{m_2 - m_2'}{R^2} m_1 -$$

равнодействующая силы притяжения со стороны шара B ($m_2 = \rho_2 V_2$) и силы притяжения со стороны «зеркального отражения» шара B — шарика B' ($m_2' = \rho V_2$). Силу F_1 можно назвать весом шара A в поле тяжести шара B. По аналогии с «обычным» весом — весом тел в поле тяжести Земли — можно считать, что в поле силы тяжести шара B все тела приобретают «ускорение свободного падения»

$$g' = \gamma \frac{m_2 - m_2'}{R^2}.$$

Однако $\mathbf{F}_1$ — не единственная сила, действующая на шар A: мы забыли еще одну силу — выталкивающую силу Архимеда. Как известно, эта сила $\mathbf{F}_1'$ равна по величине весу жидкости, вытесненной шаром A, то есть $F_1' = \gamma \dfrac{m_2 - m_2'}{R^2} m_1'$, где $m_1' = \rho V_1$ — масса вытесненной жидкости. Направление этой силы противоположно направлению $\mathbf{F}_1$. Итак, результирующая сила, действующая на шар A, равна

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1'; \quad F_A = \gamma \frac{m_2 - m_2'}{R^2}(m_1 - m_1').$$

Аналогичным образом можно найти результирующую силу, действующую на шар B:

$$F_B = \gamma \frac{m_2 - m_2'}{R^2}(m_1' - m_1).$$

Видно, что $F_B = -F_A$, то есть силы взаимодействия шаров удовлетворяют третьему закону Ньютона.

При $\rho_1 < \rho < \rho_2$ силы F_A и F_B направлены наружу, то есть шары расталкиваются. Если же $\rho_1 > \rho$ и $\rho_2 > \rho$, то силы F_A и F_B направлены внутрь, то есть шары притягиваются.

Будем считать, что шар «заряжен» положительно, если его плотность $\rho_ш$ больше плотности жидкости ρ, будем считать его «нейтральным», если $\rho_ш = \rho$, и «заряженным» отрицательно, если $\rho_ш < \rho$. При этом мы имеем некоторую аналогию с электростатикой. Разница только в том, что у нас притягиваются одноименные «заряды», а разноименные отталкиваются.

К задачам «Квант» для младших школьников»
(см. «Квант» № 9).

1. а) Разобьем 50-угольник на два правильных 25-угольника. Поскольку женщин 25, то в вершинах одного из 25-угольников не меньше 13 женщин. Но $13 > 25/2$, поэтому две женщины сидят в соседних вершинах 25-угольника, а между ними только одна вершина 50-угольника — искомая.

б) Пусть гости, у которых разбиты приборы, соединены диагональю длины a. Нужно найти женщин, удаленных друг от друга на a.

Если a — не наибольшая диагональ, то от каждой женщины идут две такие диагонали, всего $2\cdot 26 = 52$ диагонали, а диагоналей длины a всего 50; значит, какие-то две из них совпадают. Пусть это диагональ AB. Тогда $AB = a$, A и B — искомые женщины.

Если a — максимальная диагональ, то от каждой женщины идет одна такая диагональ; их 26, а диагоналей всего 25, опять две диагонали совпадают.

2.
$$\begin{array}{ccccc} 22 & \times & 13 & = & 286 \\ + & & \times & & - \\ 97 & + & 5 & = & 102 \\ \hline 119 & + & 65 & = & 184. \end{array}$$

Указание. Легко видеть, что $\overline{A} = 9$, $\overline{K} = 0$, $\overline{P} = 1$.

3. 6 машин, 39 мотоциклов, из них 13 с коляской.

4. а) 11111229; б) 77192329. Указание. Впереди надо оставлять наименьшие (наибольшие) цифры, пока это возможно.

5. Вода в маленьком сосуде кипеть не будет.

К статье «На даче»
(см. «Квант» № 9)

В рассказе два противоречия физическим законам.

1. При включении холодильника температура в комнате не понижается, а повышается, так как электрическая энергия потребляемая холодильником, превращается в тепло *).

2. 127-вольтная лампочка горит ярче, чем 220-вольтная той же мощности, включенная в электрическую сеть с напряжением 127 *в*. Действительно, первая лампочка имеет ту же номинальную мощность, что и вторая, при меньшем напряжении, поэтому из формулы мощности электрического тока $P = \frac{U^2}{R}$ следует, что сопротивление у первой лампочки меньше, чем у второй. Но тогда (как показывает та же формула) при одинаковом напряжении первая лампочка дает большую реальную мощность, чем вторая.

Замечание. Если вы посчитали, что эпизод с электрическими плитками описан неверно, то в этом вы не правы. Как известно, сопротивление проводника пропорционально его длине, поэтому спираль на первой плитке имеет большее сопротивление, чем на второй. Отсюда следует (опять ссылаемся на формулу мощности $P = \frac{U^2}{R}$), что при одинаковом напряжении первая плитка имеет меньшую мощность, чем вторая.

*) Более подробно об этом можно прочитать в решении задачи Ф285, «Квант», 1975, № 3. *(Прим. ред.)*

К статье «Как? А если невозможно, то почему?»

(см. «Квант» № 9)

Вечный скиталец. Секрет невозможности попасть в «дом Д» заключается в том, что все ячейки делятся на два множества: вида ∇ и вида Δ. Все ячейки вида ∇ заполнены нечетными числами, а ячейки вида Δ — четными. При переходе из ячейки в соседнюю виды ячеек чередуются. Очевидно, что если путник совершает маршрут, состоящий из числа шагов, указанного в «нечетной» ячейке (∇), то непременно попадает в «четную» ячейку (Δ). Если же путник очередную серию шагов совершает из ячейки Δ, в которой записано четное число, то он вновь оказывается в «четной» ячейке (Δ). А дом путника принадлежит множеству «нечетных» ячеек вида ∇. Следовательно, домой наш путник никогда не попадет.

Алгоритм сильнее случая. Ящики надо перенумеровать и положить на платформу весов одну деталь из ящика № 1, отдельно (столбиком) две детали из ящика № 2, три — из ящика № 3, . . ., десять — из ящика № 10. На платформе весов окажется 10 столбиков, объединяющих 55 деталей.

Определяем вес этих деталей и полученное число вычитаем из 55. Число десятых, содержащихся в разности, указывает номер ящика с бракованными деталями.

Трюк кинооператора. Трюк кинооператора — прием «решения с конца». Очевидно, что последней удаляемой фигурой является одна из двух ладей. Предположим, что процедуру удаления фигур мы зафиксировали на кинопленку и пустили ее в обратном направлении. Что мы увидим? Руку, ставящую одну из белых ладей на a1 или на

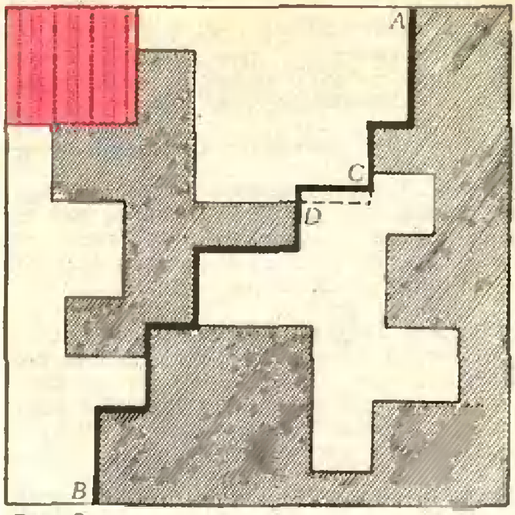


Рис. 3.

h1 (две возможности для первого хода «с конца»). Второй ход «с конца» дает $2 \cdot 2 = 4$ варианта заполнения полей доски соответствующими фигурами (ладьями и конями) и так далее до тех пор, пока останется одно поле для одной последней фигуры. Всего получается $2^7 \cdot 1 = 128$ возможных различных последовательностей (и фильмов) восстановления (а значит, и удаления) восьми фигур.

Недоумение завхоза. Будем считать, что кроме пяти комнат, показанных на плане (см. рис. 3 в статье), есть еще и шестая — та, в которую ведут наружные двери (сад). Существование маршрута с заданным свойством зависит лишь от количества комнат с нечетным числом дверей. Действительно, если входишь в комнату с четным числом дверей, то всегда и выйдешь из этой комнаты, пройдя через каждую дверь по разу. Поэтому такие комнаты можно не учитывать в дальнейших рассуждениях.

Рассмотрим комнату с нечетным числом дверей. Если начало маршрута вне такой комнаты, то конец — внутри, и наоборот. Следовательно, заданный маршрут существует тогда, когда есть лишь две комнаты (вместе с «наружной») с нечетным числом дверей. В одной из них маршрут начинается, в другой — кончается. Первый план удовлетворяет условию существования решения: есть только две комнаты с нечетным числом дверей — «наружная» (7 дверей) и «B» (5 дверей).

На втором плане (рис. 4 в статье) — 4 комнаты с нечетным числом дверей («B», «D», «E» и «наружная»). Искомый маршрут должен иметь два разрозненных «начала» и два разрозненных «конца», следовательно, непрерывным быть не может. Надо заделать одну дверь, общую для двух комнат с нечетным числом дверей.

Пятак в руках находчивого ученика. В результате построения окружностей O_1 и O_2 имеем: $O_1A \# PO_2$. Пара окружностей O_2 и O_3 дает: $PO_2 \# O_3Q$. Далее $O_3Q \# RO_4$, $RO_4 \# O_5S$ и, наконец, $O_5S \# BO_1$. Получаем $O_1A \# BO_1$, откуда и следует, что точка B диаметрально противоположна точке A.

К головоломке Дьюдени

(см. «Квант» № 9, 1-ю с. обл.)

Первое, что приходит в голову — это разрезать одеяло по жирной зигзагообразной линии на нашем рисунке. Но это не верно: получившиеся части не совпадают по форме и размерам. Разрез следовало бы вести не по участку C, а по пунктирной линии D, но «шов» по линии D не проходит. На самом же деле нужно вырезать заштрихованную часть. (Лоскут в левом верхнем углу показан для ориентации.)

К задачам

(см. «Квант» № 9, с. 29)

2. Провести окружность с центром в точке F и радиусом $|AF|$. Пусть она пересекает параболу в точке K, тогда отрезок KA — искомый (для случая, когда эта окружность не пересекает параболу, ответ найдите самостоятельно).

3. Указание. Воспользуйтесь признаком делимости на 9.

К ребусам

(см. «Квант», № 10, с. 60)

1. (По строчкам)

$$27 : 9 + 7 \times 5 = 50,$$
$$6 + 2 : 4 \times 11 = 22,$$
$$9 - 7 + 1 \times 6 = 18,$$
$$8 + 4 : 6 \times 22 = 44,$$
$$50 + 22 + 18 + 44 = 134.$$

2. $$99 : 11 = 9,$$
$$3 + 5 = 8,$$
$$102 : 6 = 17.$$

3. $339 \times 264 = 89\,496.$

(см. «Квант», № 9, с. 72)

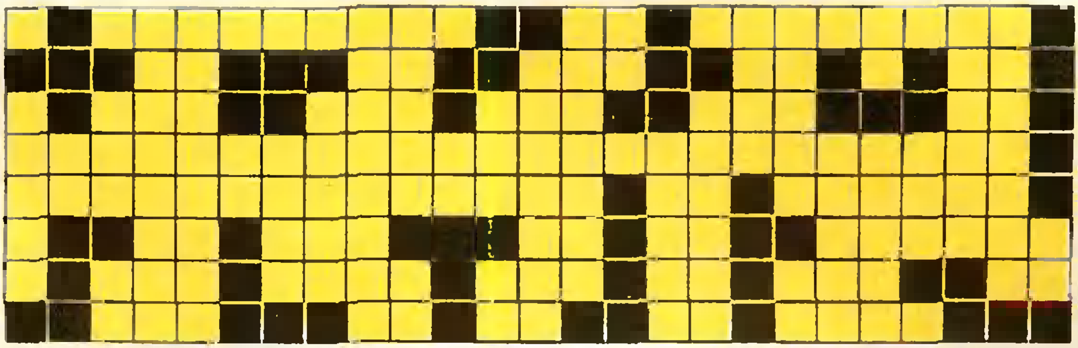
1. а) $998 \times 191 = 190\,618;$
б) $100 : 32 = 3{,}125.$
2. $87\,654 \times 19\,320 = 1\,693\,475\,280.$

Корректор Л. С. Сомова

113035 Москва, Ж-35, Б. Ордынка 21/16.
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 17/VII-75 г.
Подписано в печать 5/IX-75 г.
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,67 Т-14877
Цена 30 коп. Заказ 1539 Тираж 348 357 экз.

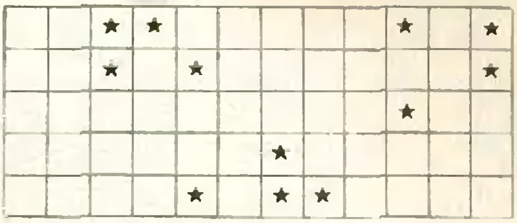
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



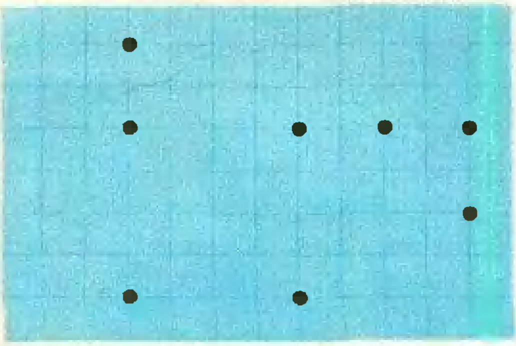
Головоломки

Пентамино-пасьянс



Двенадцать пентамино (рис. сверху) уложены в прямоугольник (рис. справа). Восстановить границы фигур, если каждая звездочка попадает ровно в одно пентамино.

Л. П. Мочалов

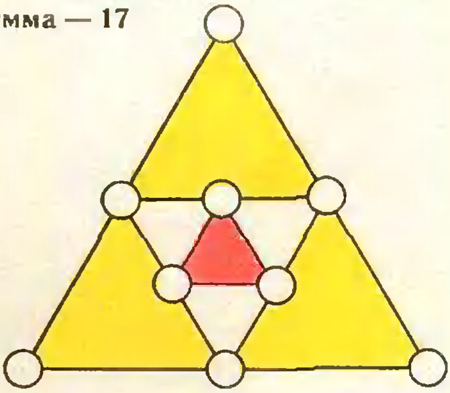


Разрежьте прямоугольник

На листе клетчатой бумаги изображен прямоугольник (рис. слева). Разрежьте его на восемь одинаковых частей так, чтобы в каждой из них находилась одна черная точка.

Ю. А. Аленков

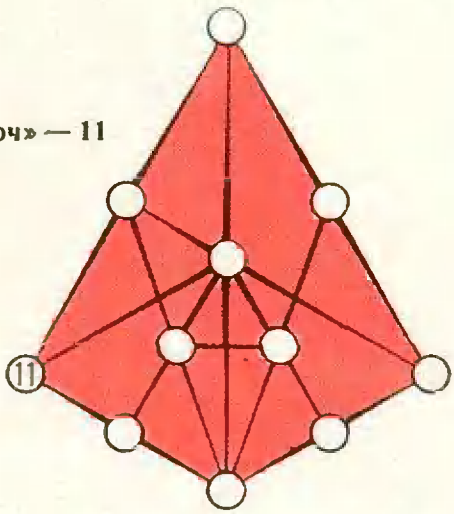
Сумма — 17



В пустые кружки фигуры расставьте цифры от 1 до 9 так, чтобы их сумма по периметру каждого заштрихованного треугольника равнялась 17. Задача имеет два существенно различных решения. Найдите их.

Ю. А. Аленков

«Ключ» — 11



В кружках этой фигуры расставьте числа от 1 до 11 так, чтобы сумма чисел на каждой прямой равнялась 18. Менять место числа 11 не следует, так как оно является «ключом» к решению.

Я. А. Алексеев

Цена 30 коп.

Индекс 70465

10

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

Продолжается подписка на 1976 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

«Квант» адресован всем школьникам 5—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи и хотят принимать участие в олимпиадах, горят желанием в будущем серьезно заниматься точными науками.

Наш журнал полезен и тем школьникам, которые еще «не зажглись» физикой или математикой, интерес которых к точным наукам еще дремлет.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Наш журнал полезен также и учителям. Сейчас происходит коренная переработка школьных программ по математике и физике. «Квант» активно участвует в этой работе.

В 1976 году «Квант» будет публиковать серии статей по новой программе и факультативным курсам.

Какие вопросы и задачи могут ожидать абитуриента на вступительных экзаменах? Как эти экзамены происходят? Ответы на эти и многие другие вопросы читатель найдет в разделе «Практикум абитуриента». В 1976 году мы планируем расширить раздел «Квант» для младших школьников». В настоящее время учащиеся 4—7 классов не имеют задачников, соответствующих новой программе. Мы надеемся в своих публикациях восполнить этот пробел.

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

ЖУРНАЛ РАСПРОСТРАНЯЕТСЯ ТОЛЬКО ПО ПОДПИСКЕ. ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛ НЕ ОГРАНИЧЕНА.

При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465. Цена номера 30 коп.